OXFORD

Secundaria

Trabajo en proceso 3

Matemáticas

Rubén Arteaga García
Andrea Sánchez Marmolejo

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford, el cual promueve los objetivos de excelencia en la investigación, el aprendizaje y la educación, mediante publicaciones en todo el mundo. Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido, México y otros países.

Av. Insurgentes Sur 1602, int. 11-1101, Col. Crédito Constructor, Benito Juárez
Ciudad de México, C.P. 03940

www.oup.com.mx

TRABAJO EN PROCESO 3. MATEMÁTICAS

Secundaria

Segunda edición: 2017

Segunda reimpresión de la segunda edición: 2019

ISBN 978-607-426-488-0

Autores: Rubén Arteaga Marmolejo, Andrea Sánchez Marmolejo

Gerente editorial: T. Karina Salgado Peña

Supervisión de producción: Miguel A. Castro

Supervisión de diseño: J. René Piedra Tenorio

Se terminó de imprimir en
Impresora y Editora Xalco, S.A. de C.V.
www.grupocorme.com
Tel. (55) 5784-6177

Impreso sobre papel Bond reciclado de 68 g

Impreso en México

Palabras para el profesor

Trabajo en proceso 3. Matemáticas es una novedosa propuesta para el estudio de la matemática, basada en un enfoque que ofrece un amplio margen de libertad en la elección de los métodos de enseñanza de esta materia. Además, atiende aspectos relacionados con una adecuada dosificación y graduación de los conocimientos disciplinarios y procedimentales, de acuerdo con el hecho de que lo constructivo afecta los métodos y las actividades, y lo significativo afecta los contenidos.

Esta propuesta es el resultado de una exhaustiva revisión de las corrientes pedagógicas y metodológicas actuales y considera al estudiante como el sujeto central de su aprendizaje, encargado de la edificación de su conocimiento a partir de la reflexión derivada de su propio trabajo, resaltando que el aprendizaje tiene su base en el desarrollo de competencias y actitudes, por lo que el profesor es quien debe fomentar en el alumno la reflexión de la acción para desarrollar sus capacidades cognitivas, de comunicación, psicomotrices y de inserción social, entre otras, teniendo como premisa que el alumno identifique, construya y compruebe la toma de decisiones con respecto a su teoría personal del aprendizaje dentro de un contexto psicológico y sociocultural.

Con base en lo anterior, *Trabajo en proceso 3. Matemáticas* se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación es promover los procesos de crecimiento personal en el marco cultural del grupo al que pertenece y que estos aprendizajes no se producirán de manera satisfactoria a no ser que se suministre una ayuda específica a través de la participación de los alumnos en actividades intencionales, planificadas y sistemáticas, que logren propiciar en ellos una actividad mental constructiva como mecanismo de influencia educativa que promueve, guía y orienta los aprendizajes.

De manera general se plantean los siguientes propósitos para el profesor:

1. Analizar los temas mediante la propuesta didáctica: *identifica-construye-decide-comunica*.
2. Formular secuencias de contenidos que determinan el desarrollo de habilidades matemáticas y personales.
3. Situarse como mediador de esta orientación de aprendizaje.

El aspecto básico de *Trabajo en proceso 3. Matemáticas* es que en la clase el trabajo en grupo favorezca el intercambio de ideas entre los componentes del conocimiento y la descripción de éste. En dicha situación, el profesor provoca una nueva interrelación niño-adulto que será la base para facilitar la información deseada y en consecuencia la atención a la diversidad y formación de valores y actitudes.

La trascendencia radica en la labor educativa, ya que el gran esfuerzo del ordenamiento, la coordinación y el desarrollo de las actividades de aprendizaje, representa la interacción del docente y el alumno en un núcleo ordenado. Por tanto, el profesor asume la dirección y organización del aula, no sólo para trabajar en ella, sino que tiene que estar comprometido para alcanzar la plenitud de los objetivos.

Las nuevas necesidades formativas deben estar dirigidas a fomentar la autonomía, a elaborar y construir el conocimiento, las propias interpretaciones, y a reconstruir la cultura. Todo ello no sólo implica asumir nuevas formas de enseñar y aprender, sino también redefinir la organización y los contenidos de la educación secundaria en función de esas metas. Dicho en pocas palabras, los contenidos específicos de las matemáticas deben concebirse más bien como un medio para el desarrollo de capacidades y valores más generales en los alumnos, que les permitan dar sentido a esos contenidos.

Esperamos que esta obra logre ser un apoyo en su práctica docente y contribuya, incluso, en su desarrollo profesional y les incentive para proyectar su compromiso personal y social al proporcionarles algo más que un recurso en el aula: un apoyo en el diseño de sus estrategias para lograr una enseñanza efectiva.

Palabras para el alumno

Trabajo en proceso 3. Matemáticas es una obra planeada para que realices el estudio de la matemática de manera amena y práctica.

Uno de los temas de mayor relevancia, para nosotros, es el aporte de materiales adecuados y novedosos para apoyar la labor del docente y reforzar tu aprendizaje. La comprensión de las matemáticas te ayudará en cualquier actividad, en la profesión que elijas y en todos los ámbitos de tu vida. Ojalá estas páginas despierten tu interés en el lenguaje en que está cifrado el universo.

Es importante destacar que para esta obra tú eres el actor de tu propio aprendizaje recurriendo a tus conocimientos adquiridos en ciclos escolares anteriores y desarrollando tus habilidades, siempre apoyado por tu profesor. Para lograr esto, *Trabajo en proceso 3. Matemáticas* te permite analizar, argumentar, cuestionar, plantear y resolver problemas mediante diversos procedimientos y desde perspectivas diferentes, de una forma más eficaz y divertida. Para este propósito, la obra está organizada en cinco bloques que, a su vez, están divididos en tres ejes mediante la siguiente planeación didáctica:

Aprendizajes esperados. Delimitación formal de los alcances deseados.

Ideas clave. Te sugiere estrategias de trabajo y estudio en forma individual y grupal.

Repasa tus conocimientos. Incluye actividades que permiten determinar el nivel de conocimientos que tienes para resolver un problema.

El estudio de cada tema se desarrolla a través de cuatro secciones en las cuales construyes, comparas, relacionas, representas o interpretas tus conocimientos y habilidades, según la situación planteada. Las secciones son:

- **Identifica.** Planteamiento de una situación problemática que pone en juego el uso de habilidades, conocimientos previos y nuevos.
- **Construye.** Oportunidad para exponer, analizar y validar tus argumentos.
- **Decide.** Cierre de la etapa de identificación y construcción; momento de poner en práctica las habilidades y destrezas.
- **Comunica.** Cuando se presente será el momento ideal para que expreses tus puntos de vista y razonamientos con el grupo, utilizando diferentes estrategias.

Además, se ofrecen recursos didácticos que refuerzan la comprensión de los contenidos del grado que cursas.

Resumiendo. Se presenta una síntesis de los conocimientos estudiados en las lecciones de cada tema.

Profundizando. Actividad en la que aprenderás un contenido específico para el tema a través de la puesta en práctica de los conceptos matemáticos.

Resolviendo problemas. Donde encontrarás la oportunidad de construir tu propio conocimiento y aplicar las habilidades que adquiriste al proponer y resolver problemas.

Reto. Donde pondrás a prueba tus conocimientos.

Ten en cuenta. Son breves comentarios que apoyan la comprensión de conceptos y estrategias clave en los temas que se están estudiando.

Explora en internet. Donde obtendrás información dinámica e interactiva de los conocimientos que estudiarás y encontrarás materiales que te permitirán ampliar el estudio de cada tema.

Algo esencial. Te brinda información sobre conceptos o definiciones que te serán de mucha utilidad.

Antes de terminar, cada bloque se complementa con secciones como:

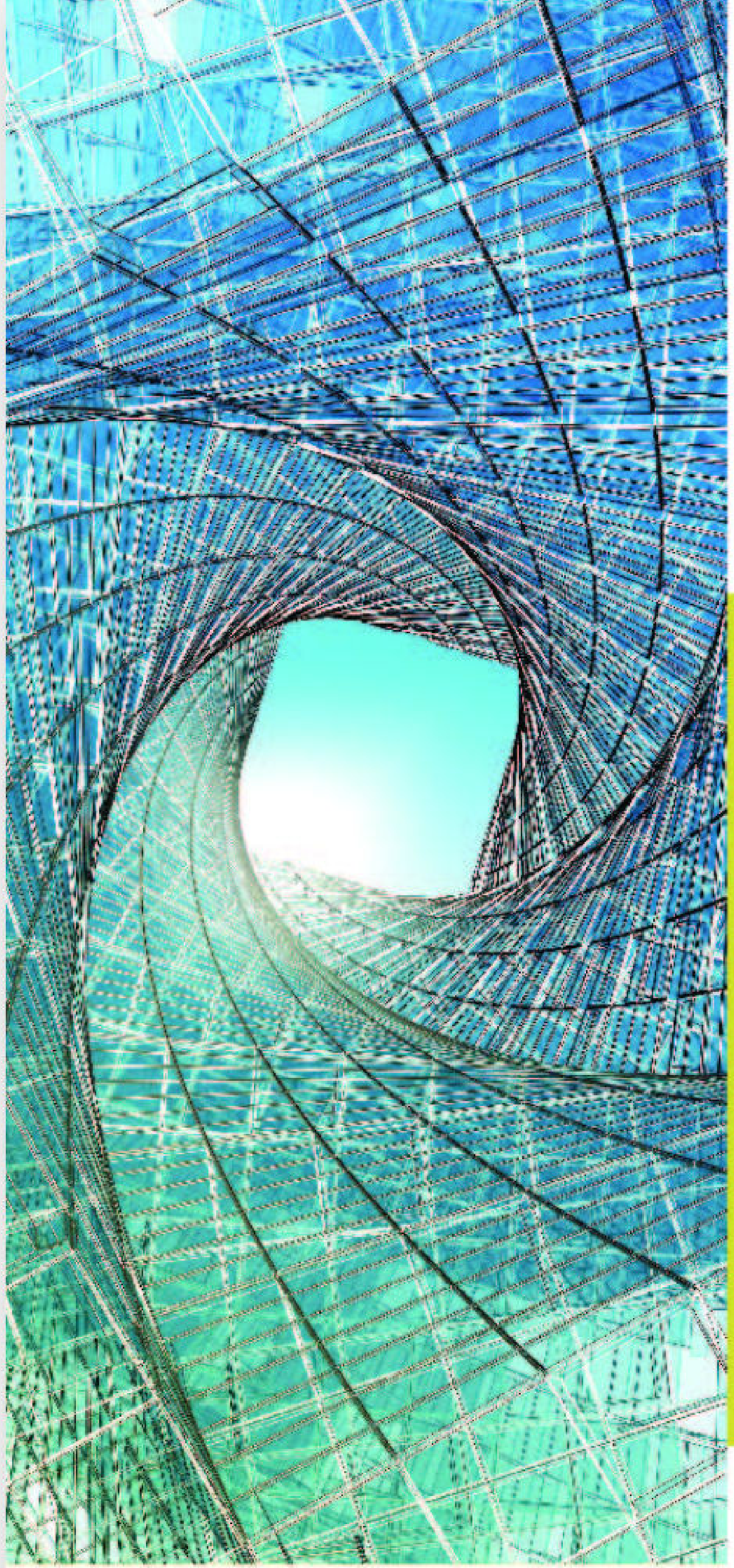
Competencia matemática en acción: Manejo de técnicas con eficiencia y Haz la prueba. En las que conocerás o aplicarás diferentes formas de resolver problemas y podrás valorar tus conocimientos y habilidades en la solución de situaciones problemáticas.

Informativo matemático. Se divide en tres apartados: *Ciencia* e *Historia* son apoyos en los que pones a prueba tu capacidad para relacionar algunos de los conocimientos adquiridos; el tercer apartado: *Caso curioso*, te invita a realizar una actividad o investigar sobre algunos de los temas que estudiaste en cada bloque.

Evaluación de competencias. Al final de cada bloque encontrarás evaluaciones tipo PISA con las que pondrás a prueba tus aprendizajes al resolver problemas planeados en tres niveles: *a)* El de recuperación, que evalúa los conocimientos que ya han sido practicados. *b)* El de conexión, que evalúa diferentes conocimientos utilizados en una situación y *c)* El de reflexión, que considera los anteriores para llegar a la solución de un problema de mayor complejidad.

Además, esta obra presenta un diseño atractivo que tiene como misión hacer del estudio de la matemática un proceso práctico, sencillo y ameno.

Contenido esquemático



Bloque 1

El uso de la matemática está presente en todo momento: en los lenguajes hablado y escrito, en las formas musicales, en las imágenes de video, en el diseño de estructuras y la geometría natural, etcétera.

Nuestra habilidad para reconocer, interpretar y entender lo que nos rodea constituye el elemento clave para tratar con nuestro alrededor en todos los aspectos, ya sean económicos, políticos, sociales o tecnológicos.

Respecto al lenguaje matemático, la cuestión es la comprensión no sólo del significado de expresiones, gráficas o formas sino de sus aplicaciones e importancia al representar las ideas, ya que su meta es y será siempre transmitir de manera eficaz la información matemática en forma breve y sin ambigüedades.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

Expliques la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Ideas clave

Comunica correctamente de forma oral tus ideas utilizando el vocabulario adecuado a partir de lo estudiado, aceptando de manera tolerante las opiniones de los demás, valorando la inventiva y la imaginación.

Emplea la argumentación para describir con precisión tus conclusiones, relaciones y situaciones que expliques, atendiendo a los distintos casos estudiados y los que aprendiste en internet.

Resuelve problemas relacionando y valorando los resultados; siendo perseverante y claro con tu trabajo y aceptando las diferentes estrategias planteadas por tus compañeros.

Dosificación Bloque 1

Semana	Tema	Subtema	Aprendizajes esperados
		Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico	
1	Patrones y ecuaciones	1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	
		Eje: Forma, espacio y medida	
2	Figuras y cuerpos	1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	
3		1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	
		Eje: Manejo de la información	
4	Proporcionalidad y funciones	1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	
5		1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	
6	Nociones de probabilidad	1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	1. Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
7	Análisis y representación de datos	1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	
8	Evaluación tipo PISA		
8	Autoevaluación		

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Repasa tus conocimientos

Contesta en tu cuaderno.

1. ¿Qué elementos integran una ecuación algebraica?
2. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 1x = 25$
   a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$
   b) $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
   c) $x_1 = 5$, $x_2 = 5$
   d) $x_1 = 15$, $x_2 = 15$
3. ¿Cuál es la figura geométrica más sencilla que se puede trazar?
   a) Cuadrado.
   b) Rombo.
   c) Círculo.
   d) Triángulo.
4. ¿Qué condición deben cumplir dos triángulos para que coincidan?
5. ¿Cuáles criterios se pueden aplicar para determinar la congruencia de triángulos?
6. ¿Se pueden trazar dos triángulos iguales si solamente se indica $\angle A = 45°$, $\angle B = 70°$, longitud de lado $AB = 6$ cm?
7. ¿En qué tipo de situaciones conviene utilizar una tabla para representar las relaciones que existen entre los datos?
8. ¿Cómo se puede determinar si los datos que se presentan en una tabla guardan una relación proporcional?
9. ¿Las tabulaciones de datos siempre se pueden traducir a un modelo matemático?
10. Dentro de la escala que pueden tomar los valores de probabilidad, ¿qué valor corresponde a la probabilidad de un evento que puede suceder con toda seguridad?
11. ¿Cómo se calcula la probabilidad frecuencial?
12. Menciona los tipos de encuestas que existen.

Comenta tus respuestas con el grupo y registra tus conclusiones en el cuaderno. De esta manera al finalizar el estudio de este tema podrás valorar tus avances.

Patrones y ecuaciones

1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Es de gran utilidad comprender que en una ecuación una letra es una incógnita y que ésta puede representar un conjunto de valores. Esto requiere representarlas mediante modelos o medios que sirvan para plantear lo necesario y facilitar su resolución.

Para comprender la solución de las ecuaciones hace falta que se experimente la doble relación entre la situación y las expresiones algebraicas.

IDENTIFICA

Realicen en equipos de tres un planteamiento para resolver el siguiente problema.

Compré cierto número de relojes por $192.00. Si el precio de cada reloj es de $\frac{3}{4}$ del número de relojes, ¿cuántos relojes compré?

CONSTRUYE

Analicen en equipo el tratamiento de los datos del problema de la sección "Decide" y el procedimiento que se presenta a continuación.

En la primera parte del problema tenemos que:
x representa la cantidad de relojes
y representa el precio del reloj
así $(x)(y) = 192$
En la segunda parte de nuestro problema:
$y = \frac{3}{4}x$
se tienen dos ecuaciones:
$xy = 192$ ... (1)
$y = \frac{3}{4}x$ ... (2)
Sustituimos la ecuación 2 en 1.
$x\left(\frac{3}{4}x\right) = 192$
$\frac{3x^2}{4} = 192$
$3x^2 = 768$
$x^2 = 256$
Obteniendo las soluciones:
$x_1 = 16$
$x_2 = -16$
El valor negativo no se considera para nuestra situación, así que sustituimos el valor $x = 16$ en la ecuación 2:

$$y = \frac{3}{4}x$$
$$y = \frac{3}{4}(16)$$
$$y = 12$$

La cantidad de relojes es de 16 y el precio de cada uno es de $12.00

DECIDE

1. Comparen el análisis que hicieron con los otros equipos y escriban las conclusiones generales.
2. Individualmente, pongan a prueba lo aprendido resolviendo el siguiente problema.

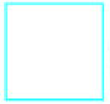
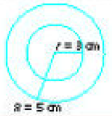
Compré cierto número de plumas por $24.00. Si cada pluma me hubiera costado $1.00 menos, podría haber comprado cuatro plumas más por el mismo dinero. ¿Cuántas plumas compré y a qué precio?

COMUNICA

Analiza en grupo las diferencias en los procedimientos que cada quien empleó. Escribe en tu cuaderno la conclusión a la que llegaron.

IDENTIFICA

1. Identifica e interpreta en la tabla la información de cada situación y reflexiona el procedimiento para resolverla, siendo ordenado y coherente en tu trabajo. Expón tus ideas al grupo y participa con sentido crítico y respetuoso.

Figura	Área	Determina
a) Cuadrado  l	$A = l^2$ $144 = l^2$	l = ________
b) Corona circular 	$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$	A = ________

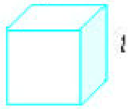
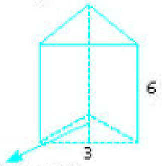
c) Cubo 	$V = l^3$ $V = 64$	$l =$ ________
d) Prisma 	$V_p = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3}$	$V =$ ________

Tabla 1.1

2. Expresa en lenguaje común las fórmulas del cuadro anterior.

CONSTRUYE

1. Para cada figura plantea dos procedimientos diferentes que resuelvan las situaciones de la tabla anterior. Escríbelos en tu cuaderno.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Las fórmulas que se estudiaron son del tipo cuadráticas y cúbicas, ¿qué otras conoces?
2. Busca en tus libros de Ciencias II y Ciencias III algunas ecuaciones cuadráticas o cúbicas que correspondan a otro tipo de situaciones y exprésalas en lenguaje común.

COMUNICA

Comenta y compara tus respuestas con las de tus compañeros y juntos elaboren una conclusión. Presenten sus resultados al profesor.

IDENTIFICA

Has escuchado hablar de Galileo Galilei. Él investigó sobre la caída de los cuerpos y comprobó que al caer dos objetos en caída libre en el vacío, no importando su masa, la velocidad con la que llegan al suelo es la misma. Esto se establece con la siguiente ecuación.

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Donde:

a) h = Altura.
b) g = Aceleración de la gravedad = $9.8\frac{m}{s^2}$.
c) t = Tiempo de caída del objeto.

CONSTRUYE

Analiza la situación anterior y responde en tu cuaderno las preguntas que se plantean a continuación.

1. Si el objeto se deja caer desde una altura de 160 m, ¿cuánto tiempo tardará en impactarse con el suelo?
2. Explica cómo lo resolviste.
3. Un objeto tarda en caer al suelo tres segundos, ¿a qué altura se dejó caer?
   a) En esta ecuación, ¿cuáles variables están relacionadas y cuáles son?
   b) En las dos situaciones anteriores hubo una incógnita. Si se desconocieran ambos datos: h y t de la ecuación, ¿se podría resolver? Justifica tu respuesta y comparte tus conclusiones con el grupo.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde lo siguiente:

1. Escribe con una incógnita la siguiente información y en los dos últimos renglones un enunciado que se ajuste a la expresión algebraica.

Un número y su cuadrado.	
Los cuadrados de dos números consecutivos.	
Los cuadrados de dos números cuya diferencia es 10.	
Los cuadrados de dos números cuya suma es 20.	
	$x^2 + 2$
	$x^2 + x$

Tabla 1.2

2. Escribe las ecuaciones correspondientes con una incógnita.

La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 113.	
La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 17.	
El cubo de un número más tres es igual a 30.	

Tabla 1.3

3. Despeja la letra incógnita que se indica en cada una de las siguientes fórmulas:

$A = pr^2$ $\quad r =$

$F = G\frac{Mm}{r^2}$ $\quad m =$

$V = a^3$ $\quad a =$

COMUNICA

Comparte tu procedimiento con el grupo. Reflexionen sus respuestas y juntos elaboren una conclusión. Si tienen dudas pregunten a su profesor.

IDENTIFICA

Considera la ecuación $(x+2)(x-1)-3-x=(x-1)^2$.

1. Sustituye x por cualquier número que elijas y comprueba que siempre se verifica la igualdad. Eso significa que cualquier número es solución de esta ecuación.
2. Desarrolla los dos miembros y verás que en ambos aparece la misma expresión. Escríbela en tu cuaderno.

Algo esencial

Una *identidad* es una igualdad con letras, la cual es cierta para cualquier valor que se le asigne a las letras, que es el caso contrario a las ecuaciones, donde sólo son ciertas para algunos valores o para ninguno. La "ecuación" anterior es una identidad.

CONSTRUYE

Analiza el ejercicio anterior y plantea cuatro igualdades en las que aparezca la misma expresión al desarrollar cada miembro de la ecuación. Escríbelas en tu cuaderno.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Comprueba, desarrollando los paréntesis, si las siguientes igualdades también son identidades:

   a) $(x+2)^2=x^2+2x+4$

   b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x+\frac{x}{6}=x$

2. Sustituye los valores de $x=-2,-1,0,1,2,3$ y completa las tablas:

   a) $x+\frac{1}{x}=2$

   b) $\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{2}{2x-3}$

Salida	1er. miembro	2do. miembro
$x=-2$	$-2\frac{1}{2}$	2
$x=-1$		
$x=0$		
$x=1$		
$x=2$		
$x=3$		

Tabla 1.4

Salida	1er. miembro	2do. miembro
$x=-3$		
$x=-2$		
$x=0$	-2	$-\frac{2}{3}$
$x=2$		
$x=3$		
$x=4$		

Tabla 1.5

c) $x=\frac{2}{x+3}-1$

d) $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}+x$

Salida	1er. miembro	2do. miembro
$x=-2$		1
$x=-1$		
$x=0$		
$x=1$		
$x=2$	2	$-\frac{3}{5}$
$x=3$		

Tabla 1.6

Salida	1er. miembro	2do. miembro
$x=-3$		
$x=-2$		
$x=0$		
$x=2$		
$x=3$		
$x=4$		

Tabla 1.7

3. Contesta en tu cuaderno.
   a) ¿En cuál de las igualdades anteriores se puede determinar la solución de la ecuación? Explica por qué.
   b) En las cuatro expresiones anteriores determina los valores para los cuales el denominador es cero y explica qué sucede con la ecuación.
4. Forma un equipo para explorar y resolver los siguientes problemas.
   a) Determina el valor de b para que $x=-3$, sea solución de la ecuación: $2x^2+bx-3=0$, y halla la otra solución.
   b) Explica tu procedimiento ante el resto del grupo, analicen las diferencias y obtengan una conclusión.
5. En los problemas siguientes escribe en tu cuaderno la estrategia utilizada y las operaciones que realizaste.
   a) Determina dos cantidades cuya diferencia es 13 y su producto 300.
   b) Encuentra dos números cuya suma sea igual a 30 y su producto 250.
   c) Determina un número cuyo cuadrado menos 5 es igual a 220.
   d) ¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es igual a 100 cm^3?

COMUNICA

Expón ante el grupo tus resultados de las actividades anteriores. Intenten formular otras ecuaciones; entre todos revísenlas y decidan si son iguales, equivalentes o distintas. Discutan las diferentes posibilidades de solución y acuerden el procedimiento más adecuado. Escribe en tu cuaderno las conclusiones a las que lleguen.

Manejo de técnicas con eficiencia

1. Utiliza la calculadora para encontrar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones. Antes de ello completa las tablas correspondientes. Si puedes resolver la ecuación utilizando otro procedimiento, descríbelo.

a)

$x^3 + x = 130$	1er. miembro
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 1.8

b)

$x^3 + x = 60$	1er. miembro
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 1.9

c)

$x^3 + x = 18.125$	1er. miembro
$x = 2.1$	
$x = 2.2$	
$x = 2.3$	
$x = 2.4$	
$x = 2.5$	
$x = 2.6$	

Tabla 1.10

d)

$x^3 + x = 1.344$	1er. miembro
$x = 1$	
$x = 1.1$	
$x = 1.2$	
$x = 1.3$	
$x = 1.4$	
$x = 1.5$	

Tabla 1.11

2. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones, dando la solución con dos cifras decimales.
a) $x^2 + 1 = 2.2625$ b) $a^2 - 5 = -4.9375$ c) $x^3 + x = 10$ d) $a^2 - a = 20$

Resumiendo

En este apartado aprendimos que existen situaciones que se resuelven mediante ecuaciones cuadráticas que se identifican por tener una sola variable y ésta es de segundo grado, es decir, que su exponente es 2.

Este tipo de ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna.

Las *ecuaciones de segundo grado o cuadráticas* se pueden resolver por el método de ensayo y error, es decir, que se van probando, en vez de las variables, diferentes números hasta encontrar el que cumpla con las condiciones del problema.

Otra manera de encontrar la solución es utilizando las operaciones inversas: suma-resta, resta-suma; multiplicación-división, división-multiplicación, o potencia-raíz, raíz-potencia.

Figuras y cuerpos

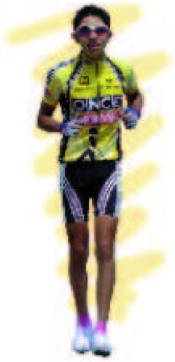
1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

En la actualidad existen múltiples programas de televisión donde la investigación es el eje de la aventura, la intriga o la ciencia ficción. Seguramente has visto que el investigador o detective, con un simple vistazo a la escena de la acción, afirma que el involucrado en los hechos mide 1.70 m de estatura. ¿Cómo puede hacer esta afirmación? Pues bien, existe una relación entre la longitud del pie con la estatura de la persona; por ejemplo, es muy raro encontrar una persona con 1.50 m de estatura que use calzado de 30 cm. En esta lección estudiaremos la semejanza de las figuras.

IDENTIFICA

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y diferente tamaño.

A



B

Explora en internet

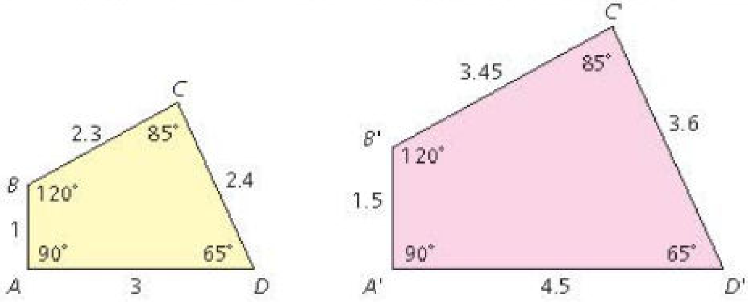
Visita la página http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_5.html
Esta página está destinada al estudio de la semejanza de polígonos.
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Entre las imágenes *A* y *B* no hay más diferencia que el tamaño. Lo mismo ocurre entre una foto y su ampliación.

Algo esencial
En dos figuras semejantes, los ángulos correspondientes son iguales y la razón (cociente) entre las longitudes correspondientes es la misma; es decir, las longitudes que se corresponden son *proporcionales*.
En matemáticas, el término correspondiente suele ser sustituido por el de *homólogo*.

¿Qué se entiende por "la misma forma"? Por ejemplo, si la nariz de la persona en la foto A mide en una pantalla de cine 100 veces más que en la cinta, lo mismo ocurrirá con la oreja. Y no sólo eso, si la nariz tiene un determinado ángulo en la cinta, el mismo ángulo tendrá en pantalla.

Dos polígonos son semejantes cuando sus ángulos homólogos o correspondientes son iguales y sus lados homólogos son proporcionales. Veamos un ejemplo:



Igualdad de ángulos $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ $\sphericalangle D = \sphericalangle D'$

Proporcionalidad de segmentos: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}$

Naturalmente, si consideramos al segundo cuadrilátero como primero, la razón de semejanza se invierte y su valor para este caso sería $\frac{2}{3}$.

Con base en la información, dibuja un triángulo cuyas medidas sean 3, 4 y 5 *u*.

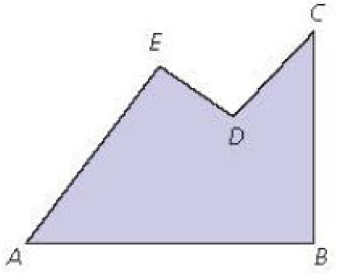
A partir de la figura:

a) Dibuja un triángulo semejante de menor tamaño.

b) Dibuja un triángulo semejante de mayor tamaño.

c) Determina la razón de semejanza de ambos triángulos.

Construye un polígono semejante al pentágono *ABCDE* con una razón de semejanza igual a $\frac{4}{3}$.



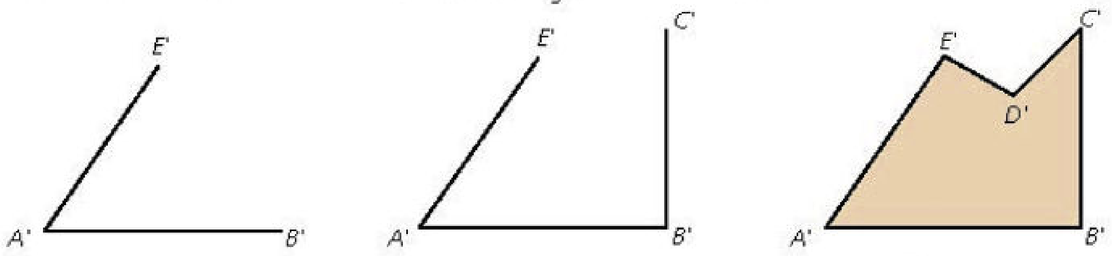
Ten en cuenta

Razón de semejanza. La razón o cociente de los dos lados homólogos entre el segundo y el primer cuadrilátero es igual a $\frac{3}{2}$, es decir: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$.

Ten en cuenta

La razón de semejanza entre dos polígonos semejantes es el cociente entre sus lados homólogos.

El segundo polígono será mayor (el cociente de la razón de semejanza es mayor que 1). Para hallar sus lados, habrá que multiplicar los lados del pentágono por $\frac{4}{3}$ y conservar los ángulos.



Los ángulos homólogos son iguales y la razón de los dos lados homólogos es, en este caso, $\frac{4}{3}$.

CONSTRUYE

Realiza las siguientes actividades:

1. Con apoyo de tu juego de geometría construye las figuras siguientes a una razón de semejanza de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{3}$ respectivamente.
2. Analiza las figuras que obtuviste, validando las propiedades de las figuras semejantes. Escríbelo en tu cuaderno.

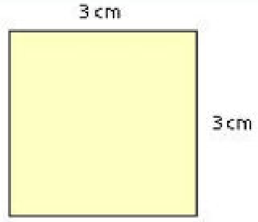
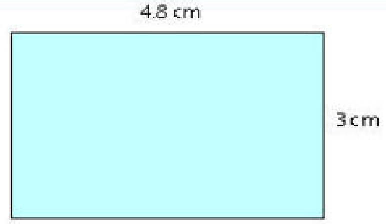
Figura	Construcción
	
	
	

Tabla 1.12

3. En tu cuaderno escribe con tus propias palabras el procedimiento para construir una figura semejante a otra.
4. Escribe, en tu cuaderno, cinco situaciones donde se utilice el conocimiento sobre figuras semejantes, incluyendo las ciencias, la tecnología, la naturaleza, etcétera.

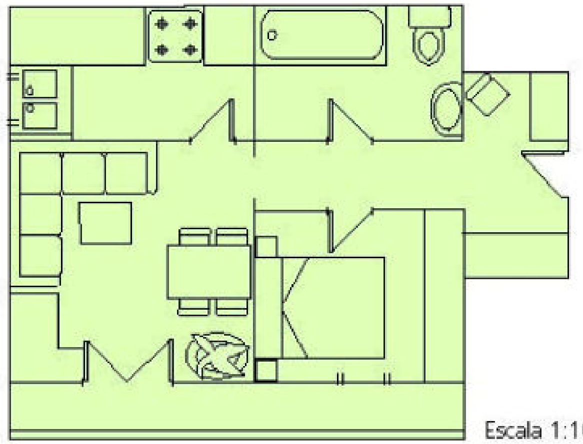
COMUNICA

Argumenta en el grupo la importancia del conocimiento matemático sobre figuras semejantes para la sociedad. Expón ante el grupo tus ideas. Debatan con ayuda de su profesor las diferencias que encuentren y anota en el cuaderno las conclusiones que obtengan.

DECIDE

Realiza las siguientes actividades:

1. Seguramente el suelo de tu aula tiene forma de rectángulo. Dibuja uno semejante en tu cuaderno, que ocupe la mayor parte de una página. ¿Qué razón de semejanza elegiste?
2. Dos cuadrados tienen lados de 8 cm y 24 cm de longitud, respectivamente. ¿Son semejantes? ¿Cualesquiera dos son semejantes? ¿Son semejantes dos rectángulos de medidas 3×4 y 9×16? Explica por qué.
3. Éste es el plano de un apartamento. La escala es la razón de semejanza entre el apartamento real y el del plano. Toma las medidas con tu regla y escribe las dimensiones reales de cada habitación.



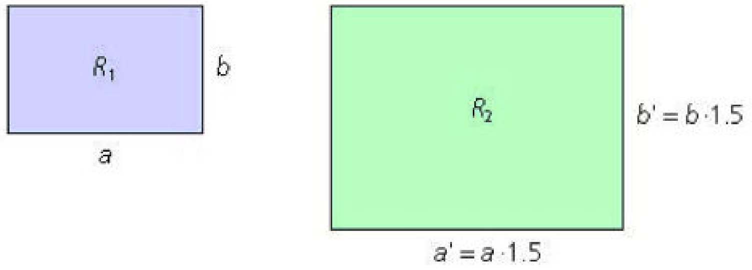
Escala 1:100

COMUNICA

Comparte tus respuestas con otros compañeros y discutan la relación que existe entre las dimensiones de los lados de dos figuras semejantes, y qué tiene que ver la escala con la semejanza de las figuras. Escribe las conclusiones que obtuvieron.

IDENTIFICA

Si dos figuras son semejantes, se puede determinar el área de una de ellas conociendo el área y la razón de semejanza de la otra:



Los ángulos son iguales y los lados proporcionales.
Los rectángulos son semejantes si:

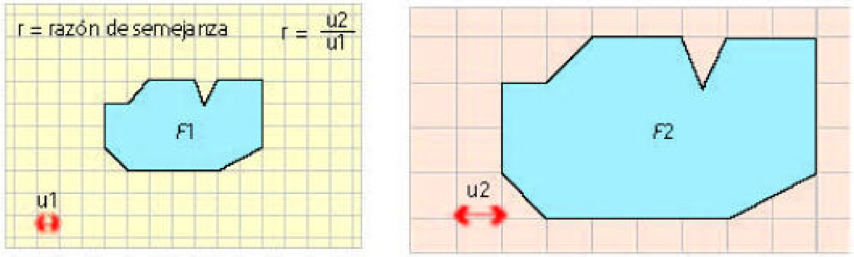
Área $(R_1) = a \cdot b$

Área $(R_2) = a' \cdot b' = a \cdot 1.5 \cdot b \cdot 1.5 = a \cdot b \cdot (1.5)^2$

Por tanto, Área (R_2) = Área $(R_1)(1.5)^2$, o también: $\dfrac{\text{Área } (R_2)}{\text{Área } (R_1)} = 1.5^2$

Esto quiere decir que la razón de las áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Esta relación, comprobada para un rectángulo, se cumple para cualquier par de polígonos o figuras semejantes. En general:
Área $(F2)$ = Área $(F1) \cdot r^2$



Ejemplo 1
Las áreas de dos polígonos semejantes son 144 cm^2 y 64 cm^2. Un lado del polígono pequeño mide 10 cm. ¿Cuánto mide el lado homólogo del polígono grande?
La razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza r.

Por lo tanto, $r = \sqrt{\dfrac{144}{64}} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

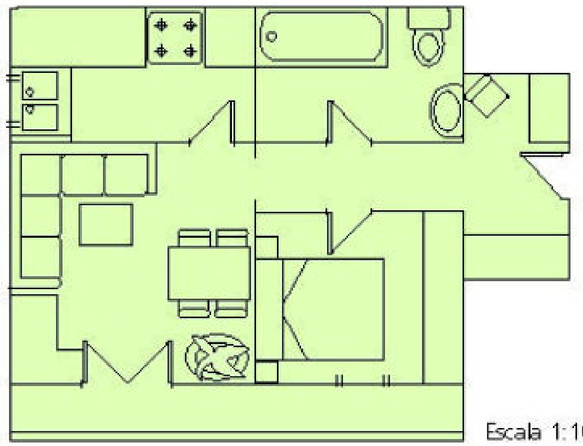
El lado desconocido, x, cumple que $\dfrac{x}{10} = \dfrac{3}{2}$. Por tanto, $x = 15$ cm.

¿Por qué se utilizó este método para encontrar el valor del lado homólogo de la figura grande?, ¿tienes otra idea de cómo resolver este problema?

CONSTRUYE

Realiza en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

1. Calcula el área de las habitaciones que se muestra en el siguiente plano:



Escala 1:100

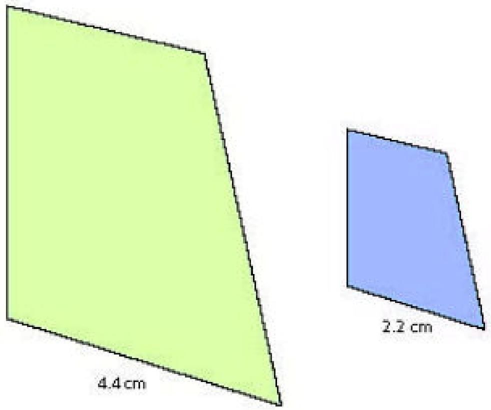
COMUNICA

Comenta a tus compañeros el procedimiento que utilizaste para resolver este problema. Analicen las diferencias que encontraron en sus respuestas y escribe en tu cuaderno las conclusiones que obtuvieron.

DECIDE

Responde en tu cuaderno lo siguiente:

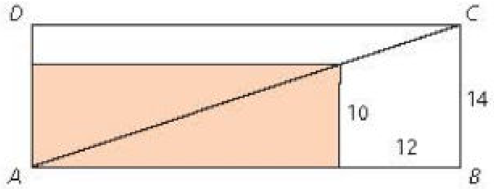
1. Los siguientes polígonos son semejantes y conocemos dos lados homólogos.
   a) Calcula, tomando medidas, el área del polígono grande.
   b) Calcula, sin tomar medidas, el área del pequeño.



Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo de tres alumnos para resolver los siguientes problemas.

1. Comprueben que los rectángulos son semejantes. ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?



2. Argumenten su respuesta.
3. Tracen un cuadrilátero $ABCD$ de modo que $\overline{AB} = 4$ cm, $\sphericalangle A = 80°$, $\sphericalangle B = 100°$, el segmento $\overline{BC} = 6$ cm y $\sphericalangle C = 120°$. ¿Cuánto debe valer $\sphericalangle D$? ¿Coincide su valor con el que resulta del dibujo?

Figura	Construcción

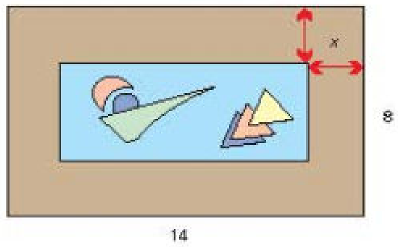
Tabla 1.13

4. Tracen ahora un cuadrilátero semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{3}{4}$.
5. Construyan con una hoja de papel un rectángulo tal que sus dimensiones sean 210 × 297 mm. Dóblenlo por la mitad y comparen las medidas de este rectángulo con el original. ¿Son semejantes?
6. Vuelvan a doblar por la mitad y obtendrán otro rectángulo. ¿Sigue siendo semejante al rectángulo original? Escriban sus respuestas y comuníquenlas ante el grupo.
7. Haz un plano de dos habitaciones contiguas de tu casa a escala 1:100.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Se puede lograr que ambos rectángulos (el interno y el externo) sean semejantes para algún valor de x?



2. El formato de las pantallas de televisión es 4 × 3, es decir, sus lados son proporcionales a los números 4 y 3. Cuando se dice que una televisión es de x pulgadas, se está indicando la medida de la diagonal de la pantalla. Calcula en pulgadas las medidas de una pantalla de un televisor de 15 pulgadas.
3. Investiguen las medidas actuales de una televisión con un formato de 16 × 9. ¿Cuáles serán entonces las dimensiones aproximadas de una televisión de 35 pulgadas? Realiza la construcción.

Explora en internet

Visita la página http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/semej1.htm Este sitio titulado "Semejanza" cuenta con varias escenas interactivas, es decir, puedes manipular las figuras para construir polígonos semejantes. Juega y aprende con la semejanza de polígonos.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Resumiendo

En esta lección comprobaste que cuando dos polígonos están hechos a escala se puede decir que son *semejantes*. Para que los polígonos sean semejantes deben cumplir con dos condiciones:

1. Las medidas de los lados de una de las figuras son proporcionales a las medidas de los lados de la otra.
2. Sus ángulos correspondientes son iguales.

Por tanto, se puede decir que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y diferente tamaño.

La semejanza de figuras geométricas la podemos encontrar en fotografías, planos de una edificación, mapas o maquetas, entre otras aplicaciones.

1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

El triángulo es el polígono más sencillo, y al mismo tiempo el que tiene mayor número de propiedades, las cuales se conocen desde la antigüedad. Así, el triángulo es notable debido a su sencillez y sus peculiaridades; más aún tiene tanta utilidad en el desarrollo de las cuestiones geométricas que es la base de complejas construcciones matemáticas.

La aplicación de sus propiedades, como es el caso de su estructura rígida, indeformable, lo hace insustituible en estructuras como puentes, torres eléctricas, etcétera, agregando a éstas —quizás por su aparente fragilidad— una apariencia serena y espectacular. Hay otras utilidades inmediatas e interesantes que se refieren a cómo se pueden argumentar las propiedades de los cuadriláteros mediante los triángulos.

IDENTIFICA

1. ¿Qué es lo mínimo que necesitas conocer para construir triángulos?

COMUNICA

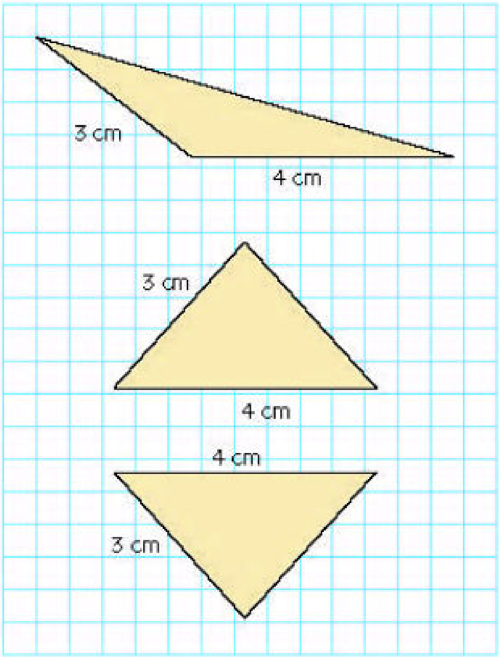
Compara con tus compañeros las ideas que explican cómo hacerlo considerando lo más relevante en las diferentes situaciones.

CONSTRUYE

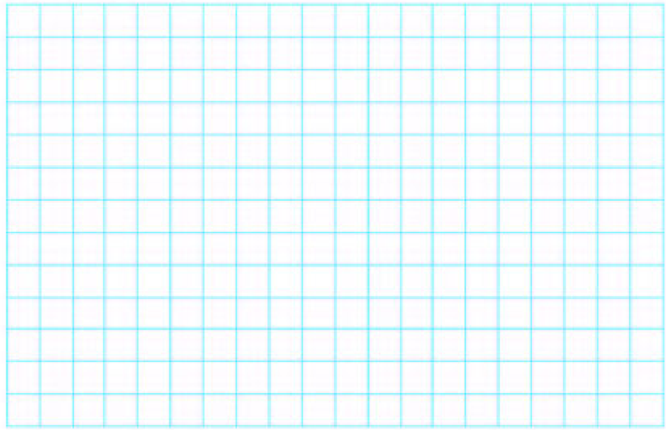
Estudien y realicen contraejemplos con las siguientes indicaciones y argumenten en equipo:

1. ¿Cuántos triángulos más se pueden construir?

Con regla y compás se construyeron estos triángulos con un lado de 3 cm y otro de 4 cm, tomando como base el lado de 4 cm.



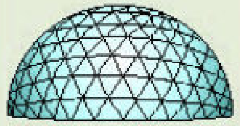
Traza todos los triángulos posibles con las medidas que se proponen en el recuadro anterior.



2. ¿Son congruentes los triángulos que acabas de construir? Explica.

Explora en internet

Visita la página http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/semejanza/swf/criterios.swf En este sitio, dedicado a la comparación de triángulos, puedes encontrar información sobre los criterios de congruencia, así como algunas preguntas básicas sobre conceptos elementales. Analiza los ejemplos, luego pon a prueba tus conocimientos sobre la congruencia.



Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Ten en cuenta

Dos triángulos son congruentes cuando al superponerlos coinciden. Para superponerlos, podemos recortar o calcar uno de ellos y llevarlo sobre el otro.
Los lados y ángulos son datos o elementos del triángulo.
Para poder afirmar que dos triángulos son congruentes, no hace falta comprobar que todos sus elementos son iguales.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde lo siguiente:
Comprueba que los triángulos I y II en las figuras 1 y 2, respectivamente, son congruentes. Argumenta tu respuesta.

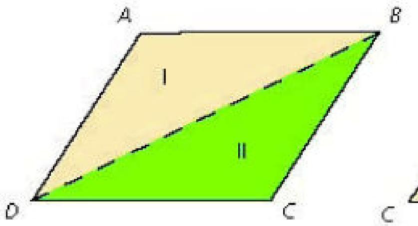


Figura 1

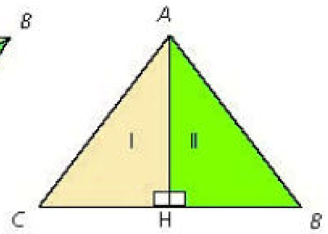


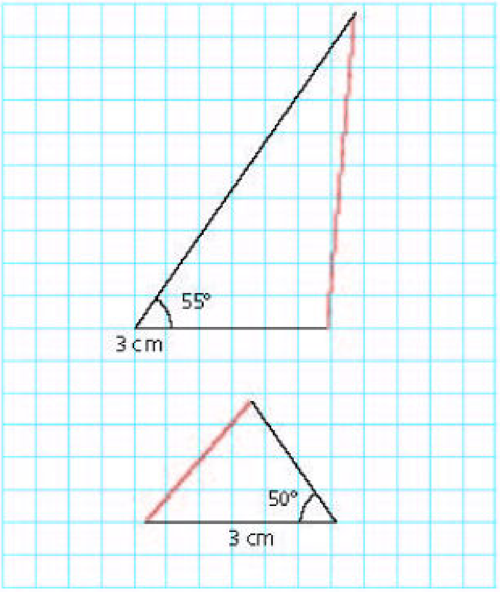
Figura 2

IDENTIFICA

Con regla y transportador se construyeron estos triángulos con un lado de 3 cm y un ángulo de 55°, tomando como base el lado de 3 cm.

Ten en cuenta

Dos triángulos son congruentes, si tienen los tres lados iguales.



1. ¿Cuántos lados y cuántos ángulos se conocían antes de trazar la figura?
2. Enuncia una regla que indique cómo construir un triángulo con las condiciones que se presentan.

COMUNICA

Analiza tu respuesta con tus compañeros y tu profesor. Escriban sus conclusiones.

CONSTRUYE

Responde:
1. Traza en tu cuaderno todos los triángulos que sean posibles con las medidas de las figuras anteriores.
2. ¿Son congruentes los triángulos que acabas de construir? Explica.

DECIDE

Realiza las siguientes actividades:
1. Formula un argumento para afirmar que el triángulo I es igual al triángulo II.

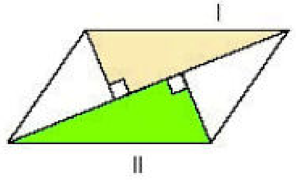


Figura 2

Ten en cuenta

Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

2. Con un compañero estudia la siguiente figura y busca todos los triángulos que son iguales. ¿Cuántas parejas de triángulos localizaste? Menciónalas.

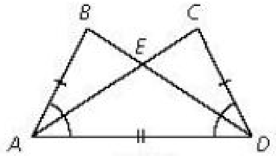


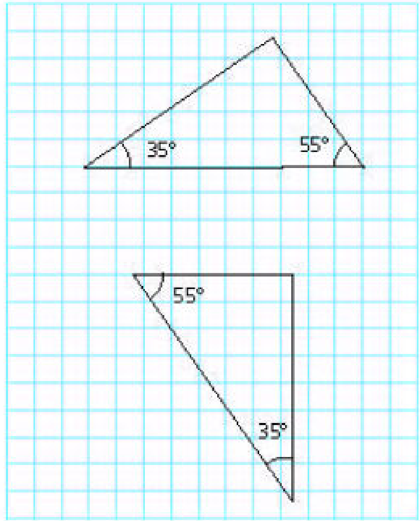
Figura 1

COMUNICA

Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor, y juntos averigüen por qué son iguales los triángulos.

IDENTIFICA

Con regla y transportador se construyeron estos triángulos con un lado de 4.2 cm y dos ángulos de 35° y 55°, respectivamente.



1. ¿Qué característica tienen estos triángulos?, ¿cuántos lados y cuántos ángulos se conocían antes de trazar la figura?
2. Escribe el procedimiento para construir un triángulo con los datos que se mencionan.

Ten en cuenta

Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente iguales con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

CONSTRUYE

1. Traza todos los triángulos posibles con las medidas anteriores.
2. ¿Son iguales los triángulos que acabas de construir? Explica.

COMUNICA

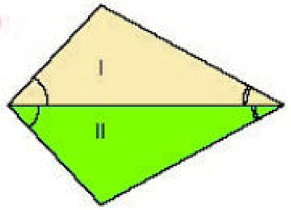
Analiza tu respuesta con tus compañeros y tu profesor. Escriban sus conclusiones.

DECIDE

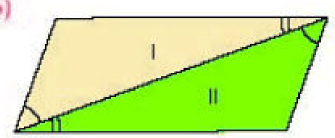
Realiza las siguientes actividades:

1. Formula un argumento para afirmar que el triángulo I es igual al triángulo II, en cada caso.

a)



b)



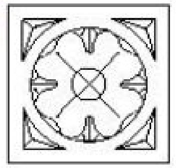
Ten en cuenta

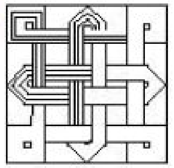
Dos o más objetos o figuras son iguales cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, son congruentes.

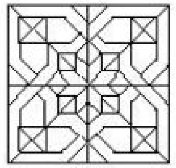
Resolviendo problemas

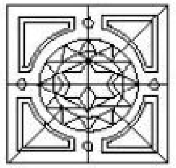
Realiza lo siguiente, al terminar presenta al grupo el procedimiento utilizado.

1. Identifica las figuras congruentes en los siguientes mosaicos, complétalos e ilumínalos con diferente color.

a) 

b) 

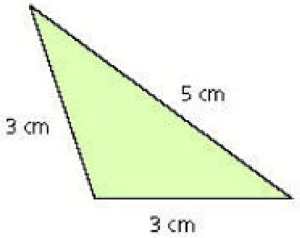
c) 

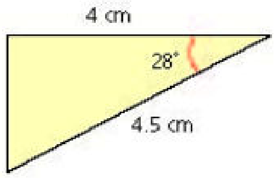
d) 

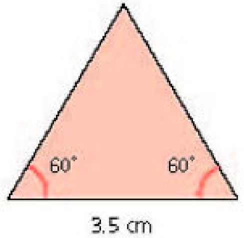
2. ¿Es posible trazar dos triángulos iguales con los siguientes tres datos? Explica con un ejemplo expresando con claridad tus ideas.

$\sphericalangle A = 45°$ $\sphericalangle B = 70°$ $\overline{AB} = 6$ cm

3. Con base en los tres criterios estudiados, en equipo propongan al grupo la medida de tres elementos de un triángulo y trácenlo.
4. ¿Cómo verificarían que son congruentes?
5. Construye el triángulo congruente a cada figura.



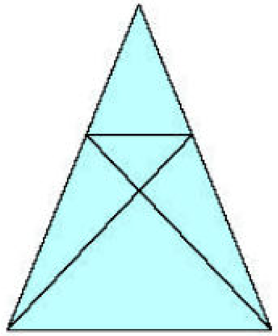




6. Al hacer coincidir dos vértices y un lado de cada triángulo congruente, ¿qué figura se forma? ¿Cuáles son sus características?

Reto

1. ¿Cuál es el mayor número de triángulos que hay en el siguiente dibujo?
2. ¿Cuáles son congruentes?

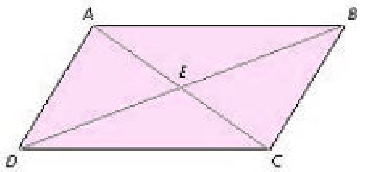


Profundizando

Estudiar la *forma* es un tema que atraviesa diversas partes de las matemáticas y las ciencias. Ofrece una rica variedad de posibilidades para la imaginación y la exploración, que pueden ir desde la construcción de modelos hasta el uso de computadoras, desde la observación hasta la experimentación.

En esta lección estudiaremos las propiedades de los cuadriláteros, conocidos como todo polígono de cuatro lados, al justificarlas mediante los criterios de congruencia y propiedades de triángulos.

1. Traza diferentes cuadriláteros en hojas por separado.
2. Si es necesario, para argumentar tus conclusiones mide, copia, recorta, dobla, compara partes del cuadrilátero o los triángulos que obtengas de éstos.
3. ¿En qué cuadriláteros se cumplen las propiedades siguientes?
   - Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a dichos lados son congruentes.
   - La diagonal lo divide en dos triángulos congruentes.
   - Los lados opuestos son congruentes.
   - Los ángulos opuestos son congruentes.
   - Las diagonales se bisecan.
4. Resuelve lo siguiente utilizando las propiedades de los triángulos y/o de los paralelogramos:
   El romboide que se presenta a continuación tiene las siguientes medidas:



a) $\overline{AD} = 3$ cm; $\overline{DC} = 5$ cm; $\overline{AE} = 2.2$ cm; $\sphericalangle B = 60°$; $\sphericalangle C = 120°$

Encuentra la medida de los lados y los ángulos que se piden y argumenta tu respuesta.

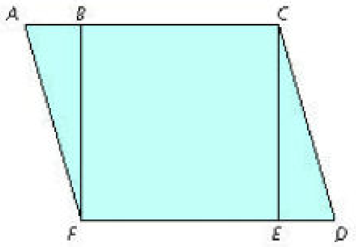
i $\overline{AB}$ = _____ iv $\sphericalangle A$ = _____

ii $\sphericalangle D$ = _____ v $\overline{EC}$ = _____

iii $\overline{BC}$ = _____

b) Demuestra que las diagonales de un cuadrado son iguales.

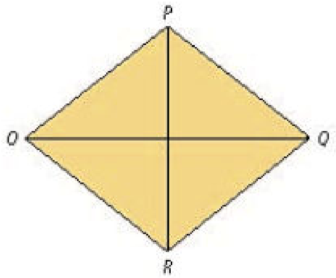
c) Demuestra que los $\triangle ABF$ y $\triangle EDC$ del siguiente romboide son congruentes. B es el pie de la perpendicular al $\overline{AC}$ y E lo es de $\overline{FD}$.



d) Calcula el perímetro y el área del siguiente cuadrilátero.

$\overline{OQ} = 15$ cm

$\overline{PR} = 10$ cm



e) Usa los criterios de congruencia para comparar los triángulos formados por las dos diagonales en un rectángulo. Comprueba que las diagonales son iguales.

Resumiendo

En este apartado determinamos cuándo dos triángulos son congruentes o semejantes y para ello se requiere conocer los criterios de congruencia o igualdad. Estos criterios consideran la relación entre tres elementos de dos triángulos:

- **Criterio LLL** (lado-lado-lado): Si los tres lados de un triángulo son congruentes respectivamente con los tres lados de otro.
- **Criterio LAL** (lado-ángulo-lado): Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de otro triángulo.
- **Criterio ALA** (ángulo-lado-ángulo): Si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de otro triángulo.

Asimismo, verificamos la congruencia de otras figuras como los cuadriláteros que se define mediante los criterios de congruencia y propiedades de los triángulos. Por ejemplo:

- El *rombo* tiene lados iguales o congruentes y sus diagonales son perpendiculares, por lo que se puede decir que es un paralelogramo equilátero.
- En el *rectángulo* los ángulos y las diagonales son iguales, por lo que se trata de un paralelogramo equiángulo.
- El *cuadrado* tiene lados y ángulos iguales y sus diagonales son perpendiculares e iguales, por lo que se puede definir como un paralelogramo equilátero y equiángulo.

Proporcionalidad y funciones

1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Muchas situaciones que se presentan en cantidad de profesiones y actividades que realiza el ser humano involucran cierta clase de relaciones de proporcionalidad. ¿Cuáles son esas relaciones de las que hablamos?

Como ya sabrás, a partir del análisis de un conjunto de datos se puede detectar el tipo de relación que se presenta entre los datos. Conviene indicar que los datos que se presentan en relación con un fenómeno pueden mostrarse en una tabla o en una gráfica. Si la cantidad de datos es grande conviene presentarlos en una gráfica para poder analizar la tendencia en su variación, es decir, si los valores tienden a permanecer constantes o varían con el tiempo. Pero si deseas obtener datos específicos como la constante de proporcionalidad, entonces conviene analizar la tabla que muestra el comportamiento de los datos.

A continuación analizaremos algunas situaciones de proporcionalidad ligadas a problemas reales.

Explora en internet

Visita la siguiente página para aprender acerca de la tabulación de las funciones:

http://cocosamlizama.blogspot.mx/p/tabulaci.html

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

IDENTIFICA

Algunos barcos utilizan un sonar para detectar la presencia de submarinos enemigos. Este dispositivo electrónico envía ondas sonoras que al chocar con el casco del submarino se reflejan y producen el eco. Luego el sonido producido es recogido por el sonar del barco, las ondas sonoras se propagan a una velocidad de 1425 m/s, de acuerdo con los datos que se presentan en la tabla siguiente.

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
1	1425
2	2850
3	4275
4	5700
5	7125
6	8550

Tabla 1.14

Analiza los datos de la tabla anterior e indica qué tipo de relación se presenta. Argumenta tu respuesta explicando qué operaciones tendrías que hacer para identificar la relación de que se trata.

El sonar utiliza frecuencias ultrasónicas, ondas cortas que van de los 20 a los 100 kHz, lo que permite que sean inaudibles para el ser humano, pero muy eficaces para detectar objetos en el fondo del mar por su menor difracción.

Ten en cuenta

En una recta ascendente, a medida que se avanza en el sentido del eje de las *x*, aumenta el valor en el eje de las *y*. En este caso la pendiente de la recta es positiva.
En una recta descendente, a medida que se avanza en el sentido del eje de las *x*, disminuye el valor correspondiente en el eje vertical. En este caso la pendiente de la recta es negativa.

CONSTRUYE

A partir de la tabla de datos del problema anterior, elabora la gráfica correspondiente.

DECIDE

De acuerdo con las actividades anteriores contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos metros recorren las ondas sonoras en el agua en 2 s?, ¿y en 4 s?
2. ¿Cuánto tiempo tardará una onda sonora en recorrer 8 550 m en el agua?
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la gráfica anterior?

COMUNICA

Comenta con tus compañeros los procedimientos que seguiste para analizar los datos de la tabla y determinar el tipo de relación de proporcionalidad. Escribe en el cuaderno las conclusiones a las que llegaron.

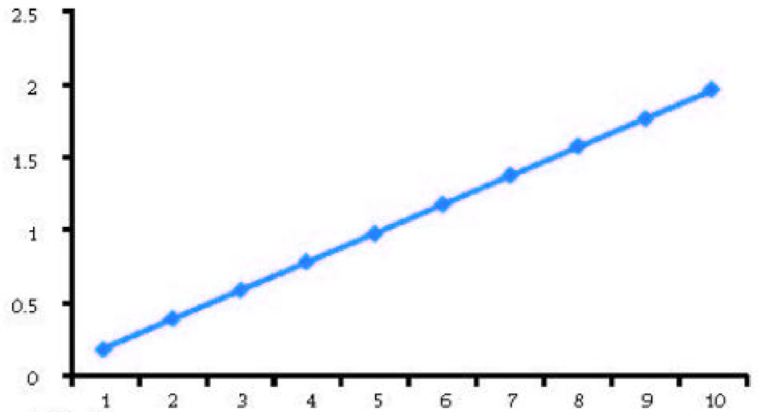
IDENTIFICA

En el Instituto de Historia se compran paquetes de papel para imprimir los exámenes que se aplican a los alumnos cada semestre. Cada paquete contiene 500 hojas y tiene un precio de 98 pesos. ¿Cuánto costará cada hoja?

CONSTRUYE

Analiza la información de la situación anterior y responde en el cuaderno lo que se solicita a continuación.

a) Analiza la gráfica y completa la tabla.



Gráfica 1.1

Hojas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio										

Tabla 1.15

b) Con base en el análisis, ¿la relación que se muestra corresponde a una relación lineal?, ¿cuál será la pendiente? y ¿cuál será la constante de proporcionalidad?

COMUNICA

Organicen en el grupo una sesión de debate donde expongan sus puntos de vista respecto a los procedimientos que se realizaron para solucionar la actividad. Comenten ¿cuál es la relación que existe entre el signo de la pendiente y la inclinación de la recta?

Algo esencial

Una función de *proporcionalidad directa* se denomina función lineal, su expresión algebraica es $y = mx$, donde m es la pendiente o constante de proporcionalidad.
Una función de *proporcionalidad inversa* tiene por expresión algebraica $xy = k$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa.

DECIDE

Resuelve los siguientes problemas:

a) Si 10 obreros han construido los muros y el tejado de una casa en 30 días, ¿cuanto tiempo tardarán en realizar la obra 40 obreros? Indica qué tipo de relación de proporcionalidad se tiene.

b) Si se tiene un recipiente con agua a 20°C (temperatura ambiente), el agua se calienta posteriormente de tal manera que su temperatura aumenta a razón de 4°C por cada minuto transcurrido.
Elaboren una tabla que muestre la variación de la temperatura.

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temperatura (°C)	20															

Tabla 1.16

Si el calentamiento del agua continúa sin cambios, ¿cuál será la temperatura del agua después de 11 min?
¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación?

c) Si la ecuación de la distancia recorrida por un objeto en movimiento es:
$d = 10 + 6t + 4t^2$
Representa el movimiento durante los primeros 30 min.

d) El producto de dos números consecutivos se puede escribir:
$x(x + 1) = x^2 + x$

Resumiendo

Las relaciones de variación tienen muchas aplicaciones, entre ellas cualquier problema que involucre una relación de variación proporcional; por ejemplo, al preparar la mezcla en una obra en construcción, al medir la cantidad de sangre que bombea el corazón cada minuto, al llenar un contenedor de agua, gasolina, aceite, etc., al preparar la comida, en el cálculo de intereses, en las tasas de crecimiento poblacional, durante la fabricación de productos, en recorridos de distancias, entre otros. Lo primero que se debe hacer es determinar si la relación indica una *proporcionalidad directa o inversa*. Luego se analizan los datos de la tabla y la gráfica para determinar la pendiente y/o el coeficiente de proporcionalidad. Si la proporcionalidad es directa, la pendiente de la recta es positiva, en tanto que si la proporcionalidad es inversa la pendiente de la recta es negativa.

Las relaciones de proporcionalidad directa tienen la forma $y = mx$, en tanto que las relaciones de proporcionalidad inversa tienen la forma $xy = k$.

Las tablas de variación proporcional permiten presentar conjuntos de datos para observar su relación y predecir tendencias o realizar comparaciones entre ellos.

Las gráficas de dos cantidades que tienen una relación de proporcionalidad se llaman *diagramas de dispersión*. Éstas se elaboran tomando como punto cada pareja de datos. Si existe una relación directamente proporcional entre ambos datos, entonces se formará una recta con una cierta inclinación positiva o negativa.

1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

En el tema anterior se vieron las relaciones de proporcionalidad del tipo directa e inversa, considerando relaciones lineales. Sin embargo, también se pueden producir relaciones de variación cuadrática que se presentan en diferentes aplicaciones relacionadas con diferentes disciplinas.

Las relaciones de variación cuadrática se caracterizan porque una de las variables que se indican en la ecuación está elevada al cuadrado.

Ten en cuenta

Muchos fenómenos de la naturaleza no se pueden representar mediante ecuaciones lineales, por ejemplo la caída de una gota de agua que es expulsada de una fuente se describe con una *función cuadrática*, al igual que la caída libre de un cuerpo.

IDENTIFICA

Un helicóptero de carga transporta un contenedor marítimo, el cual se detiene con un par de cables como se muestra en la siguiente figura. Cuando el helicóptero sobrevolaba a una altura de 245 metros sobre el nivel del mar el cable se rompe y el contenedor cae.

Esto se indica en la siguiente tabla:

Tiempo de caída (segundos)	Distancia de la caída (metros)
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80

Tabla 1.17

Determina ¿qué clase de relación proporcional se presenta en el problema?

Una de las aplicaciones de las relaciones proporcionales se distingue en este helicóptero, donde la relación distancia-tiempo se representa al transportar un objeto.

COMUNICA

Comenta con tus compañeros cómo determinaste el tipo de relación que guardan los datos presentados en la tabla anterior.

CONSTRUYE

De acuerdo con la información anterior, completa la siguiente tabla.

Tiempo (segundos)	Distancia	Altura del contenedor
0	0	245
1	5	240
2	20	
3	45	
4	80	
5		
6		
7		

Tabla 1.18

Ten en cuenta

Una expresión cuadrática se puede representar mediante una tabla de datos.

DECIDE

Después de reflexionar la actividad anterior, contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuánto tiempo tardó el contenedor en llegar al suelo?
2. Cuál es la expresión que permite calcular la distancia de caída del contenedor (d) en función del tiempo transcurrido (t)?

IDENTIFICA

Se tiene un cuadrado cuyo lado mide a, ¿cuál es la expresión algebraica que permite determinar el área del cuadrado?

CONSTRUYE

Elabora un modelo en cartulina que represente la situación anterior.

DECIDE

Si al cuadrado se le aumentan 4 cm en una de las dimensiones y 6 cm en la otra, ¿cuál es la expresión algebraica que permite determinar el área de la nueva figura que se forma?

COMUNICA

Argumenta ante tus compañeros tu respuesta a la pregunta anterior. Asimismo, comenta en el grupo cómo realizaste el modelo en cartulina que representa la situación mencionada.

IDENTIFICA

En una escuela secundaria se realizó un torneo de voleibol. Antes de iniciar un partido entre dos equipos (que tienen 11 integrantes cada uno) los jugadores de cada equipo saludarán a todos los integrantes del equipo contrario. ¿Cuántos saludos se realizan en total?

CONSTRUYE

Analiza la información anterior y responde en tu cuaderno.

1. Si uno de los equipos tiene 8 integrantes, ¿cuántos saludos se realizarán en total?

DECIDE

De acuerdo con lo aprendido en las actividades anteriores, contesta lo siguiente:

¿Qué expresión algebraica permite determinar el total de saludos (y) si uno de los equipos tiene una (x) cantidad de integrantes y el otro equipo tiene un jugador menos?

COMUNICA

Argumenta ante tus compañeros tu respuesta a la pregunta anterior. Discutan entre todos las diferencias que se encuentren y elaboren sus conclusiones.

IDENTIFICA

En un laboratorio de nutriología se analiza la alimentación del ganado bovino que se someterá a un estudio, ya que se les da una cantidad adicional de alimentos. El alimento está compuesto por una mezcla de proteínas. Se observó que la ganancia en peso de los animales, en kilogramos, está determinada por la función:

$$\text{Peso }(g) = \frac{1}{15}g^2 + 2g$$

donde g representa la cantidad de alimento suministrado, que es de 100 gramos en cada ración.

1. Completa la siguiente tabla, en la que se indica la cantidad de peso que aumenta un animal, según la cantidad de alimento proporcionado.

Cantidad de alimento proporcionado (g)	Peso ganado por el animal
4	
8	
12	
15	
16	
20	

Cantidad de alimento proporcionado (g)	Peso ganado por el animal
24	
28	
30	
32	
34	

Tabla 1.19

CONSTRUYE

Contesta lo siguiente.
1. ¿A partir de cuántas raciones el ganado empezará a perder peso?
2. ¿Cuántas raciones son ideales para que el ganado incremente la mayor cantidad posible de peso?

Resumiendo

Ante algún problema de relaciones de variación lo primero que se debe hacer es determinar si la variación es lineal o cuadrática. Si la variación es lineal (ya sea directa o inversa) al dividir los valores de y sobre x se obtendrá una constante. Si el valor del cociente no es constante entonces se tiene una variación cuadrática, misma que puede tener diferentes representaciones gráficas a las de una recta.

Una vez hecho lo anterior conviene analizar la gráfica o tabla donde se presentan los datos para detectar la función o la ecuación algebraica que determina a la variación cuadrática.

En el caso de las expresiones cuadráticas se pueden obtener gráficas en forma de curvas, tal es el caso de circunferencias, parábolas o hipérbolas.

Explora en internet

Visita la página: http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso3/htmlb/SEC_26.HTM

En este sitio encontrarás información sobre la representación gráfica y tabular de funciones cuadráticas.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Nociones de probabilidad

1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

En el curso anterior se revisaron los conceptos de probabilidad, probabilidad frecuencial y probabilidad teórica.

Contesta lo que se pide a continuación:

a) ¿Qué es la probabilidad de un suceso?
b) ¿Qué sucede a la frecuencia relativa y la probabilidad conforme aumenta la cantidad de repeticiones de un experimento aleatorio?
c) Indica un ejemplo de lo anterior.
d) ¿Cómo se calcula la probabilidad frecuencial?

IDENTIFICA

Si a partir de la probabilidad frecuencial calculada al lanzar una moneda, y obtener "sol", se obtiene 0.60, ¿cuál es el valor de la probabilidad frecuencial de obtener "águila"?

Ten en cuenta

La fórmula para calcular la probabilidad clásica es:

$$P(A)=\frac{(\text{Número de resultados favorables})}{(\text{Número total de eventos})}$$

CONSTRUYE

Analiza la actividad anterior y contesta en tu cuaderno lo siguiente:

¿Se puede asignar a la frecuencia relativa o a la probabilidad frecuencial un valor de 1.3?

DECIDE

De acuerdo con los datos obtenidos en las actividades anteriores, responde.

¿Si lanzas dos veces un dado, cambiará la probabilidad de los resultados que se obtienen?

Ten en cuenta

La *escala de valores de probabilidad* se encuentra entre 0 y 1, donde 0 corresponde al evento que no tiene ninguna probabilidad de suceder y 1 corresponde al evento que sucederá con toda seguridad.

IDENTIFICA

Partiendo de la fórmula $P(A)=\frac{n}{N}$ contesta lo siguiente:

a) ¿Cuál de los dos valores es mayor, el de N o el de n?
b) ¿Si no existiera una solución favorable para el experimento A, cuál sería el valor de n?
c) ¿Entre qué intervalos se encuentran los valores de probabilidad para el evento A?

CONSTRUYE

Analiza y reflexiona la actividad anterior, registra los resultados posibles para el evento y formula una conclusión para los posibles valores que puede tener la probabilidad de un evento o experimento.

Algo esencial

Un evento que es imposible que suceda se denomina *evento nulo*; en cambio, si el evento sucederá con toda seguridad se denomina *evento seguro*.

IDENTIFICA

Dentro de un mismo experimento se pueden tener eventos complementarios, mismos que se definen como aquellos que no son solución del primer evento.

Como ejemplo de lo anterior se puede deducir que a partir del evento que se tiene al lanzar un dado, se define al evento B como la probabilidad de obtener 3, 5, o 6 en la cara que queda hacia arriba.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada número?
2. ¿Cuál es la probabilidad del evento B?

CONSTRUYE

De acuerdo con la información anterior, contesta en tu cuaderno lo siguiente:

1. ¿Cuáles son las probabilidades que no forman parte del evento B?
2. ¿Cómo se les llama a estas soluciones?, ¿cómo se identifican?

DECIDE

Analiza las respuestas de la actividad anterior y responde:

¿Cuál es el resultado de $P(B) + P(B')$?

COMUNICA

Analiza el resultado del complemento de un evento y verifica tus hallazgos con tus compañeros. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

IDENTIFICA

Ahora se toma el evento C como obtener la cara 1 y 6, y al evento D como obtener la cara 2, 3 y 4.

¿Los eventos C y D son complementarios?

CONSTRUYE

Observa los resultados que obtuviste en la actividad anterior y responde lo que se solicita a continuación:

1. ¿Los eventos C y D tienen alguna solución en común?
2. ¿Cómo se llaman esta clase de eventos?

DECIDE

Analiza lo aprendido en las actividades anteriores y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué característica tienen en común ambos eventos?
2. ¿Pueden dos eventos complementarios ser mutuamente excluyentes?

COMUNICA

Analiza el siguiente problema y compara tus resultados con los de tus compañeros. Traten entre todos de resolver sus diferencias. Apóyense en su profesor si tienen dudas.

1. Si el evento A se define como obtener 3 o 4, el evento B se define como obtener 1 o 2, y el evento C se define como obtener 5. ¿Los eventos B y C son mutuamente excluyentes?
2. ¿Los eventos A y C son mutuamente excluyentes?
3. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?
4. Si en el ejemplo anterior lanzas el dado y obtienes una cara con el número 6, ¿se modifica la probabilidad de obtener un 2 al lanzar nuevamente el dado?
5. ¿La probabilidad de obtener nuevamente un 6 estaría afectada por el resultado anterior?

Los eventos anteriores se denominan independientes, ya que el resultado que se obtiene en cada experimento no depende del resultado que se obtenga en cada suceso anterior.

IDENTIFICA

Si tienes una urna con cinco esferas, una negra, una verde, una azul, una roja y una amarilla, y sacas una esfera de color verde, pero no la regresas, ¿cambia la probabilidad para quien saque otra esfera?

DECIDE

¿Cómo varía la probabilidad del problema anterior si regresas la esfera?

Resumiendo

La probabilidad teórica de un evento se define como el número de eventos favorables entre el número total de eventos.

El número total de eventos siempre es mayor al número de eventos favorables.

Los valores de probabilidad se encuentran entre 0 y 1. Éstos se pueden presentar como porcentaje.

Un evento que es imposible que suceda se denomina evento nulo, un evento que sucederá con toda seguridad se denomina evento seguro.

En el caso de los eventos mutuamente excluyentes, las soluciones de cada uno de los experimentos no tienen ningún elemento en común.

En el caso de los eventos independientes, el resultado que se obtiene en cada experimento no depende del resultado que se obtenga en cada suceso anterior.

Análisis y representación de datos

1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

La información que brindan los medios de comunicación se presenta, muchas veces, a través de tablas y/o gráficos estadísticos.

En este sentido, para el área de matemáticas, resulta necesario relacionar el trabajo con situaciones que nos permitan analizar la información y reflexionar acerca de sus distintos usos.

Ahora bien, para realizar esta lectura crítica de la información que nos llega cotidianamente no basta con trabajar situaciones que remitan a lecturas casi inmediatas de los datos. Es necesario plantear instancias que propicien un análisis de los criterios que se emplean para presentar la información y de la intención que puede haber detrás de las representaciones utilizadas.

Apoyados en este propósito, consideramos adecuado mostrar distintos gráficos que representen la misma información pero tratada de manera diferente, favoreciendo así una reflexión de las posibles interpretaciones que puedan hacerse.

IDENTIFICA

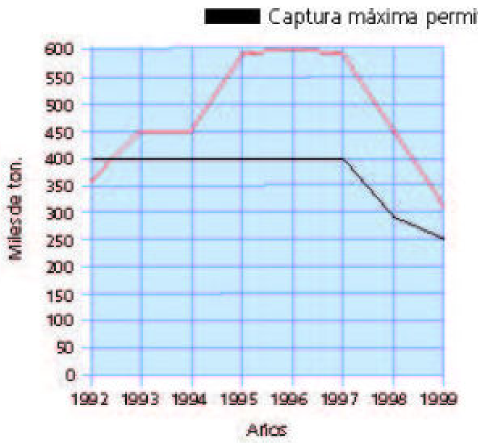
La investigación que presentamos a continuación se obtuvo a partir de una información real presentada por un medio de prensa.

La depredación de la merluza ha causado mucha preocupación en las distintas organizaciones ecologistas. Por este motivo, los miembros de varias de ellas decidieron reunirse e invitaron también a representantes de compañías pesqueras extranjeras.

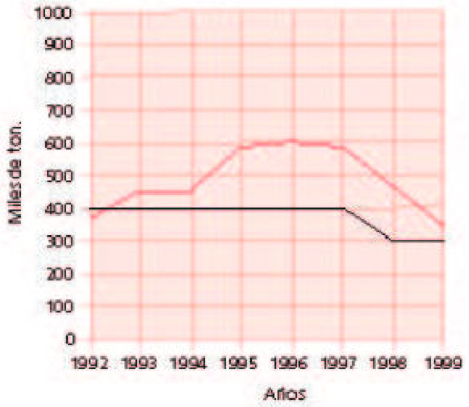
En esa reunión se consideraron estudios realizados sobre este problema y se discutió mucho acerca de dos gráficos en los que se había representado la captura máxima permitida de la merluza y la captura efectiva de la misma en miles de toneladas, durante el periodo comprendido entre los años 1992 y 1999.

A propósito de esta información, a continuación te mostramos dos gráficos. Uno propuesto por los miembros de una de las organizaciones ecologistas presentes en la reunión; el otro, por los representantes de las compañías pesqueras.

¿Qué se quiere expresar con estos gráficos?



Gráfica 1.2



Gráfica 1.3

CONSTRUYE

Analiza las gráficas anteriores y realiza las siguientes actividades:

1. Comenta con tus compañeros de equipo cuáles son tus argumentos respecto a los gráficos anteriores. ¿Son iguales? Explica.
2. Siendo crítico en tus respuestas, explica cómo han sido construidos estos gráficos. ¿Es correcto?, ¿por qué?
3. Elabora en tu cuaderno una gráfica de barras con la misma información que se presenta en las gráficas anteriores.

DECIDE

Organícense en grupos de tres o cuatro alumnos, analicen un solo gráfico por equipo y respondan con argumentos lógicos las siguientes preguntas:

1. ¿Hubo algún momento en que la pesca efectiva fue menor que la permitida? En caso de ser así, ¿cuándo ocurrió?
2. ¿Durante qué periodo o periodos aumentó la pesca efectiva? ¿En cuáles disminuyó? ¿Hubo algún periodo en que se mantuvo constante? ¿Y la pesca permitida?
3. ¿Qué piensan que pasó a partir de 1997?
4. Si las condiciones se mantienen, ¿pueden anticipar qué pasará este año? ¿Cómo lo verificarían?
5. ¿En qué momento la captura efectiva de la merluza fue máxima? ¿Y mínima?

COMUNICA

Comuniquen sus ideas al grupo, escuchando con respeto y comparando según sea el gráfico expuesto.

IDENTIFICA

En grupo reflexionen sobre lo siguiente y presenten sus ideas, siendo críticos al escuchar a los demás, participando con sencillez y apoyo para sacar conclusiones.

1. El momento en que se da el valor máximo de la captura efectiva, ¿coincide con el momento en que es mayor la diferencia entre la captura efectiva y la captura máxima permitida?
2. El momento en que se da el valor mínimo de la captura efectiva, ¿coincide con el momento en que es menor la diferencia entre ambas?

CONSTRUYE

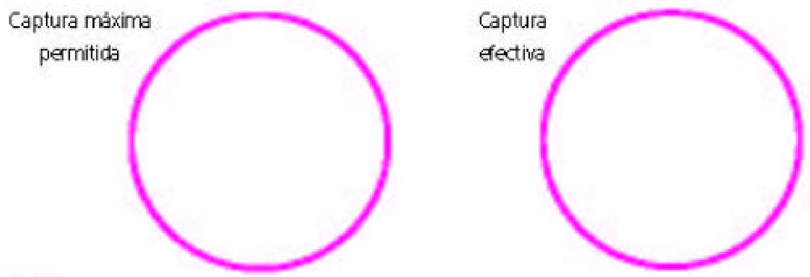
Analiza la información anterior y responde lo siguiente.

1. ¿Es óptima una tabulación de la información para responder a estas cuestiones? Realiza una tabulación para justificar tu respuesta.

Años	Miles de toneladas	
	Captura máxima	Captura efectiva
1992		
1993		
1994		
1995		
1996		
1997		
1998		
1999		

Tabla 1.20

2. Elabora la gráfica circular que corresponda a la captura máxima permitida y otra para la captura efectiva.



DECIDE

Analiza la información de las dos páginas anteriores y responde lo que se solicita a continuación.

La depredación de la merluza se estudia a través de la gráfica de líneas, el gráfico de barras, tabulación y gráfica circular. ¿Cuál de estas cuatro formas de organizar y presentar la información elegirías para dar un informe?

Explica tu respuesta y escucha la de tus compañeros.

COMUNICA

Analiza la información anterior y expón ante el grupo cómo diseñarías una encuesta, propón el tema, cómo harías el muestreo y qué herramientas utilizarías para la presentación de la información. Compara tu trabajo con el de tus compañeros y discute con ellos las diferencias que se presenten; luego escribe las conclusiones que obtengan.

Algo esencial
La extracción de una muestra de una población finita, en el que el proceso de extracción es tal que garantiza a cada uno de los elementos de la población la misma oportunidad de ser incluidos en dicha muestra se conoce como *muestreo aleatorio*.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Formen equipos de tres y realicen una encuesta a 30 jóvenes de su colonia, amigos, vecinos mayores de 20 años, para conocer quiénes fuman. De preferencia que sean 15 mujeres y 15 hombres.

El cuestionario debe incluir estas preguntas.

1. ¿Usted fuma?
2. ¿A qué edad empezó a fumar?
3. ¿Cuántos cigarros fuma al día?

Al terminar la encuesta organiza la información en la tabla para presentarla al grupo.

	Fumadores		No fumadores	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Edad promedio a la que empezaron a fumar.				
Número promedio de cigarros que consumen al día.				

Tabla 1.21

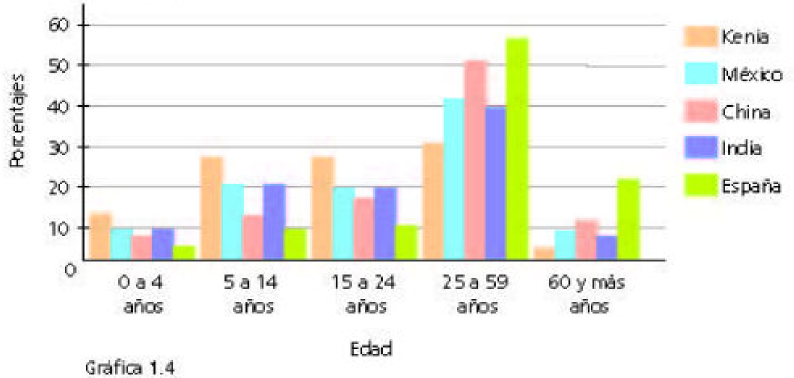
Con base en toda la información que obtuviste de la encuesta:

1. Elabora una o varias tablas de frecuencia para registrar la información obtenida.
2. Elabora una gráfica para representar la información correspondiente a no fumadores y otra para los fumadores.
3. Presenta un análisis escrito sobre esta información al grupo, decide qué tipo de gráficas son las adecuadas. Elabóralas en carteles para la exposición.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. En la siguiente gráfica se proporciona información sobre la población en países por grupos de edad, al año 2 000, en porcentajes.



Gráfica 1.4

Un estudiante presentó a su grupo la siguiente información:

En la gráfica se puede notar que España mantiene porcentajes bajos en la población menor de 24 años; sin embargo, el porcentaje se eleva en el rango de 25 a 29 años, con lo que se advierte un incremento aún mayor de población en edad avanzada.

a) Confirma esta información con la gráfica. Comenta la validez de la interpretación de datos.
b) Elabora un informe de la población de México.
c) Elabora una gráfica circular de las edades de 25 a 29 años de todos los países. ¿Con cuál gráfica (la de barras o circular) es más conveniente presentar la información? Explica tu respuesta.

2. Forma un equipo para estudiar la siguiente información que se muestra en la tabla:

Año	Población total	Hombres	Mujeres
1970	48	24	24
1980	67	33	34
1990	81	40	41
2000	98	48	50

Tabla 1.22

a) Debate con tu equipo: ¿Cuál es la gráfica con la que se puede representar mejor la información de esta tabla?
b) Elaboren la gráfica.
c) Presenten la gráfica y expongan los argumentos por los cuales tomaron esa decisión.

Resumiendo

Las tablas numéricas y los gráficos constituyen un sistema de representación que destaca por su sencillez, su capacidad de síntesis y la facilidad de ordenación de los datos que contienen. Su uso cada vez está más extendido y diversificado.

★ ★ INFORMATIVO MATEMÁTICO ★ ★

Ciencia

Uno de los principales factores en el desarrollo intelectual del ser humano es el deseo de comprender los mundos físicos y biológicos en que vivimos. Buscamos en los testimonios históricos señales que expliquen nuestra condición actual y creamos teorías para predecir el futuro. Todo ello incluye atributos cuantitativos: longitud, área y volumen de ríos, masa de tierra y océanos; temperatura, humedad y presión de nuestra atmósfera; poblaciones, distribuciones y tasas de crecimiento de especies; movimientos de proyectiles, mareas y planetas; ingresos, costos y utilidades en la actividad económica; periodicidad, intensidad y frecuencia de sonido, fuentes luminosas y terremotos. Estos factores se han representado y estudiado a partir de ecuaciones, tablas y gráficas. ¿Qué ejemplos podrías dar para relacionar a la matemática con lo antes descrito?

Historia

A través de la historia, observadores perceptivos han notado que los patrones en los objetos de estudio o investigación pueden caracterizarse con números en formas que ayudan al razonamiento. Determinando asimismo la manera en que se presentan, ordenan, organizan, tabulan, grafican, representan, modelan, formulan, etcétera.

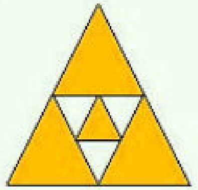
Alguna vez afirmó Lord Kelvin:

"Cuando aquello de lo que se está hablando puede medirse y expresarse con números, se sabe algo acerca del mismo; pero cuando no puede medirse, cuando no puede expresarse en números, el conocimiento es de calidad pobre e insatisfactoria".

No es exagerado decir que los sistemas numéricos de las matemáticas son herramientas indispensables para comprender el mundo en que vivimos.

Caso curioso

En un triángulo equilátero se unen los puntos medios de los lados y se forma un triángulo. A continuación se repite este mismo proceso con el triángulo obtenido y así sucesivamente, como se muestra en la figura:



a) ¿Cómo son los lados de cada triángulo con relación al anterior?

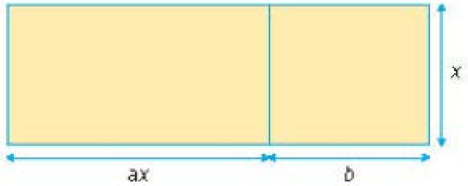
b) ¿Se puede establecer una proporción entre los lados?

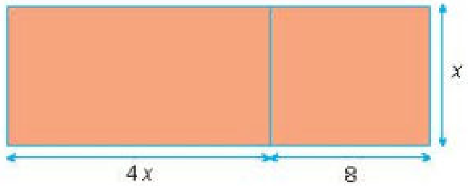
Evaluación tipo PISA

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

El anaquel

1.1 En la carpintería Pedro tiene la madera en forma de tablas para construir un anaquel de una tienda. Después de registrar las medidas para el anaquel hizo el siguiente dibujo:





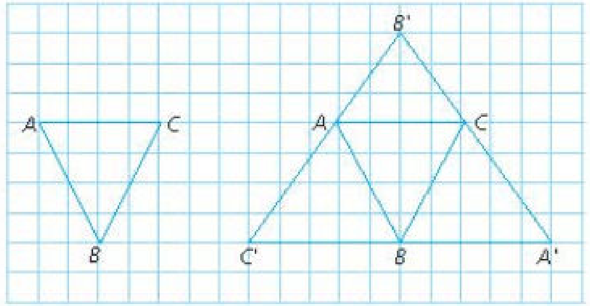
Nivel 1) Si el área del rectángulo se obtiene multiplicando la base por altura, escribe la expresión algebraica que representa el área de la figura anterior.

Nivel 2) Si $a = 5$ y $b = 3$, ¿cuál es la expresión que representa el área?

Nivel 3) Si el área de la tabla es de 20000 cm^2, determina el valor de x.

Los cuadriláteros del triángulo

1.2 En la siguiente construcción por cada vértice de ABC hemos trazado una paralela al lado opuesto y se ha formado el triángulo $A'B'C'$.



Nivel 1) ¿Cuántos cuadriláteros identificas en la figura? ¿Y cuántos de ellos son paralelogramos? Para ello puedes reproducir la construcción y trazar los cuadriláteros con diferentes colores.

Nivel 2) Traza la figura utilizando tus escuadras y verifica que los vértices A, B y C son los puntos medios de $A'B'C'$.

Nivel 3) Los cuatro triángulos pequeños son iguales. ¿Cómo lo comprobarías?

El dado

1.3 Los alumnos del grupo 3o. A llevan a cabo un experimento de probabilidad como lo es el lanzamiento de un dado, para demostrar si los eventos o sucesos que lo conforman ocurren de manera simultánea y decir si son mutuamente excluyentes, o si se complementan, es decir si comparten alguno de los eventos, o bien, si se relacionan o no entre sí, para determinar si se trata de sucesos dependientes o independientes.

Nivel 1) Encuentra el espacio muestral de lanzar un dado.

Nivel 2) Determina si los siguientes eventos son mutuamente excluyentes:

a) Que el resultado de lanzar el dado sea menor o igual a 4.

b) Que al lanzar el dado salga un número primo.

Nivel 3) Determina en el experimento "Lanzar un dado" dos sucesos que sean independientes. Justifica tu respuesta.

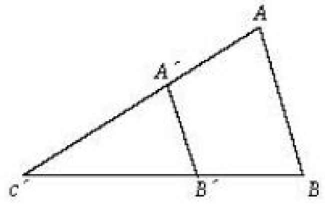
Autoevaluación

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

REALIZA

1. Las siguientes expresiones representan ecuaciones de segundo grado. Determina cuáles son sus coeficientes.
   a) $(x-1)(x+4) = 1$
   b) $x(4x+2) = 0$
   c) $-x^2 - x - 1 = 0$

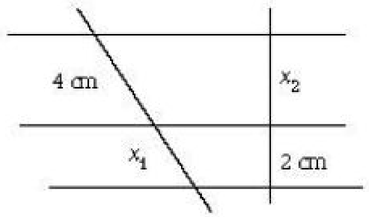
2. Encuentra en el siguiente triángulo las relaciones:
   a) sobre los ángulos.
   b) sobre los lados.



3. Dada la siguiente función $y = 2x^2$. ¿En qué puntos se corta el eje de las x?

APLICA

1. Escribe una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes sean:
   $a = 4$ $b = -3$ $c = -2$
2. Calcula el valor de los lados x_1 y x_2



3. Se extraen sucesivamente 2 canicas de una bolsa que contiene 12 canicas amarillas y 7 canicas negras.
   Halla la probabilidad de que ambas sean amarillas si la primera canica extraída:
   a) Se devuelve a la bolsa.
   b) No se devuelve a la bolsa.

REFLEXIONA

1. Determina si estas ecuaciones son de segundo grado.
   a) $3x^2 - 2x^2 = 2x^2 + x$
   b) $x(x+1) = x^2 + 2x$
2. Dibuja dos rectas secantes m y n. Después marca en m 3 puntos A, B y C que disten entre sí 3 cm y 4 cm respectivamente. Ahora por estos puntos traza rectas paralelas que cortan en n en A´, B´ y C´.
   Si la distancia entre A´ y B´ es de 6 cm, ¿cuál es la distancia entre A´ C´ y B´C´.
3. Si la media de cinco datos es 7 y cuatro de ellos son 5, 6, 9 y 12, ¿cuál es el quinto dato?

Glosario

CONGRUENTE. Que tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas.

ECUACIÓN. Igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores o datos conocidos y desconocidos, relacionados mediante operaciones matemáticas.

ENCUESTA. Conjunto de preguntas tipificadas dirigidas a una muestra representativa, para averiguar estados de opinión o diversas cuestiones de hecho.

EVENTO. Algo que sucede, por ejemplo lanzar un dado, jugar a la perinola, una partida de cartas, etcétera.

EVENTO MUTUAMENTE EXCLUYENTE. Son aquellos eventos en los que se cumple la característica de que no pueden suceder al mismo tiempo.

EVENTO MUTUAMENTE INDEPENDIENTE. Cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos).

FUNCIÓN. Se dice que una magnitud o cantidad es función de otra, si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda.

MUESTREO. Técnica para la selección de una muestra a partir de una población.

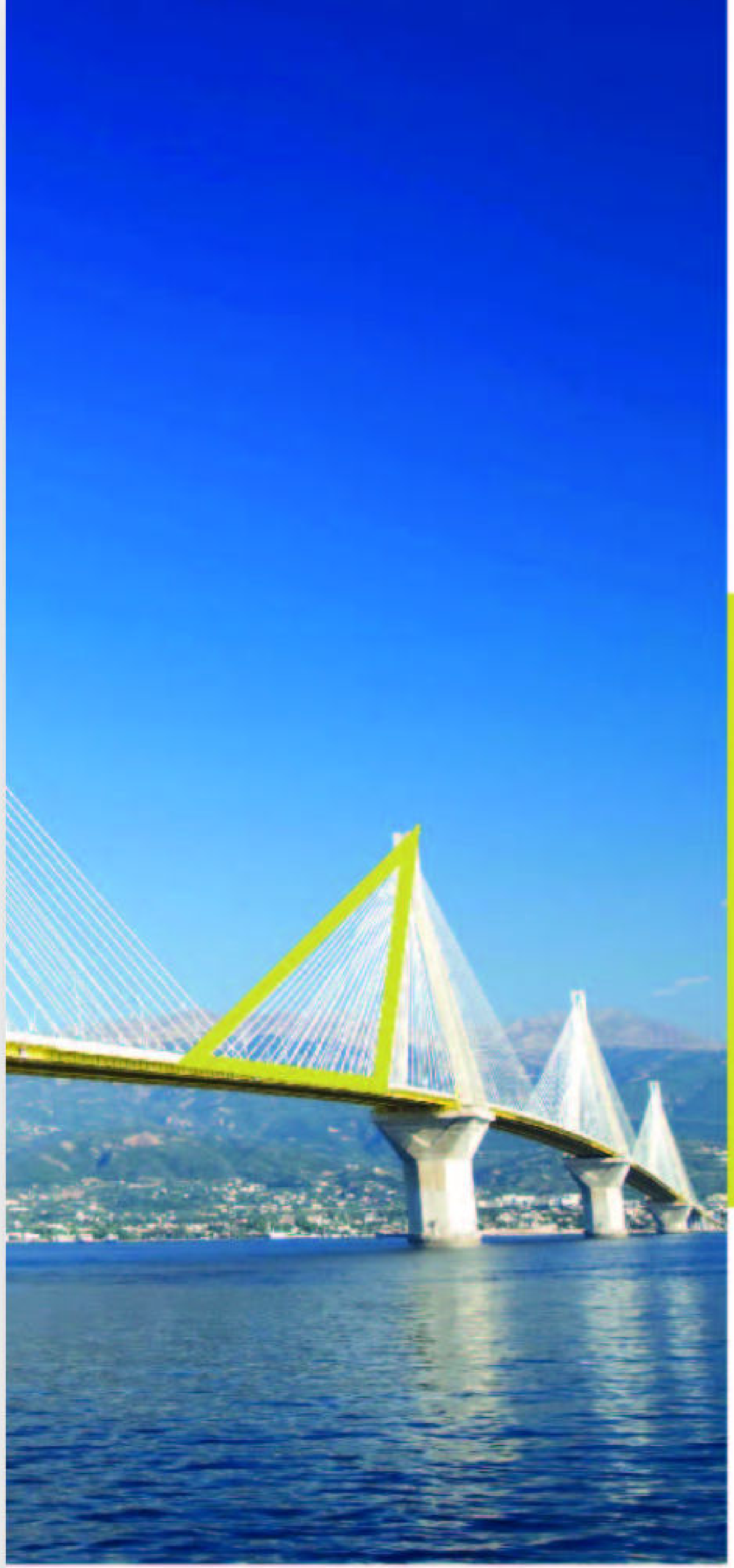
PATRÓN. Figuras, objetos o números que están ordenados siguiendo una o varias reglas.

POBLACIÓN DE ESTUDIO. El conjunto completo de donde se toma una muestra.

PROBABILIDAD. Método mediante el cual se obtiene la frecuencia de un suceso determinado.

PROPORCIONALIDAD. Conformidad o proporción de unas partes con el todo o de cosas relacionadas entre sí.

SEMEJANTE. Calidad de dos o más objetos que mantienen una proporción entre ellos.



Bloque 2

En la actualidad, la resolución de problemas de economía, física o astronomía no sería posible sin utilizar expresiones algebraicas como las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, cuyos principios de solución por factorización (multiplicando dos paréntesis) se estudian en esta unidad.

Asimismo, se proponen tareas que consideramos de mucho interés y enriquecedoras de ideas y preguntas, que en primer lugar muestran un camino que va del libro a la realidad y, en segundo lugar, dan por sentado que ese camino se debe complementar mediante la modelación y la representación.

Es importante que tomemos en cuenta que la reflexión sobre los elementos que se estudiarán no será suficiente si intentamos definirlos de forma elemental; en otras palabras, recuerden que la participación de todos enriquece y mejora todo aprendizaje.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

Expliques el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada e identifiques las propiedades que se conservan.

Soluciones problemas que impliquen el uso del Teorema de Pitágoras.

Ideas clave

Comunica tus ideas al dialogar en pequeños grupos por medio de debates, entrevistas, conversaciones, escuchando y promoviendo la originalidad.

Interpreta el sentido de la información y los procedimientos argumentando tus apreciaciones, mostrando sensibilidad y gusto por las opiniones distintas de la propia.

Elabora y **expón** tus estrategias para resolver problemas siendo coherente en la expresión de las ideas y contribuyendo al aprendizaje de los demás.

Dosificación Bloque 2

Semana	Tema	Subtema	Aprendizajes esperados
		Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico	
9	Patrones y ecuaciones	2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	
		Eje: Forma, espacio y medida	
10	Figuras y cuerpos	2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	1. Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
11		2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	
12	Medida	2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	
13		2.5 Explicitación y uso del Teorema de Pitágoras.	2. Resuelve problemas que implican el uso del Teorema de Pitágoras.
		Eje: Manejo de la información	
14	Nociones de probabilidad	2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	
15	Evaluación tipo PISA		
15	Autoevaluación		

Competencias que se favorecen
Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Repasa tus conocimientos

Contesta en tu cuaderno.

1. ¿Cuál sería la forma factorizada de la ecuación $x^2 - 5x + 6$?
   a) $(x - 3)(x - 2)$
   b) $(x + 3)(x + 2)$
   c) $(x - 3)(x + 2)$
   d) $(x + 3)(x - 2)$
2. ¿Cuál sería la forma factorizada de la ecuación $4x^2 - 12x$?
   a) $(x - 3)(x - 4)$
   b) $3x(x - 4)$
   c) $4x(x - 3)$
   d) $(x + 3)(x - 4)$
3. ¿Qué sucede con las dimensiones de una figura cuando ésta se traslada?
4. Cuando una figura se rota 180°:
   a) Equivale a reflejarse.
   b) Es un doble traslado.
   c) Sus dimensiones aumentan.
   d) Invierte su posición respecto a la original.
5. ¿Cuál es la diferencia en posición y dimensiones entre a) trasladar una imagen o b) reflejarla dos veces seguidas?
6. ¿Sobre qué tipo de triángulos se puede establecer una relación constante entre sus lados?
7. Si llamamos "a" a un cateto, "c" a la hipotenusa y "b" al otro cateto, entonces se puede afirmar que:
   a) $a^2 + c^2 = b^2$
   b) $a^2 + b^2 = c^2$
   c) $b^2 + c^2 = a^2$
   d) $a^2 - c^2 = b^2$
8. Si arrojas un dado, ¿qué probabilidad tienes de obtener indistintamente un 2 o un 5?

Comenta tus respuestas con el grupo y registra tus conclusiones en el cuaderno. De esta manera, al finalizar el estudio de este tema podrás valorar tus avances.

Patrones y ecuaciones

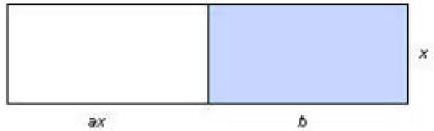
2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

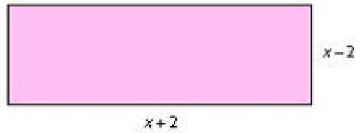
La cultura babilónica existió hace aproximadamente 4 000 años en lo que hoy conocemos como Irak; como tú sabes, era un pueblo muy avanzado en matemáticas, e incluso sabían resolver ecuaciones. En la ciudad de Nueva York, en Estados Unidos de América, está la universidad de Columbia. En ella se encuentran tablillas con inscripciones babilónicas que hacen referencia a problemas sobre ecuaciones.

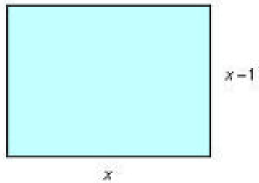
IDENTIFICA

En este tema se trabajan las expresiones algebraicas para indicar el área de cada una de las superficies indicadas.

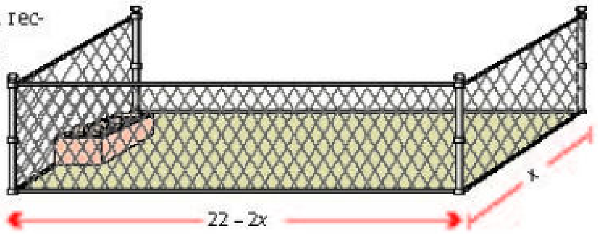
1. Determina la expresión algebraica que representa el área de cada una de las siguientes superficies.







2. Construye un modelo geométrico que represente cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado.
   a) $8x^2 + 16x = 0$
   b) $4x^2 - 16 = 0$
   c) $x^2 - 25 = 0$
   d) $a^2 - a = 0$
3. Escribe un resumen sobre el proceso de modelación que estudiamos en los puntos anteriores sobre una ecuación de segundo grado.
4. Se quiere acotar un corral para conejos de forma rectangular, que tiene 60 m² de área, con 22 m de tela metálica y utilizando un muro ya construido. ¿Cuánto deben medir los lados?



CONSTRUYE

Analiza la información del problema anterior y responde lo que se solicita.

1. Si la longitud de un lado es x, la longitud del otro será: $22 - 2x$.

   Explora la situación, completa la siguiente tabla y determina las posibles medidas de sus lados:

Lado x	1 m				
Lado $22 - 2x$	20 m				

Tabla 2.1

2. ¿Cuál es la expresión que representa el área del corral?
3. ¿Cuál es la ecuación que resulta?

   Para obtener una ecuación igual a cero, se realiza la multiplicación y se agrupan términos.

Si obtenemos una ecuación de segundo grado, podemos expresarla en forma más sencilla al cambiar de signo y dividir entre 2; por ejemplo: $4x^2 + 30x - 60 = 0$

Cambiando de signo $4x^2 - 30x + 60 = 0$

Dividiendo entre 2 $2x^2 - 15x + 30 = 0$

4. Con base en la información anterior, explora la ecuación cuadrática que obtuviste para el corral, al completar la siguiente tabla; con esto podemos determinar la posible medida de su lado y el valor de su área:

Valor de x	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m
Valor de la ecuación obtenida		12			

Tabla 2.2

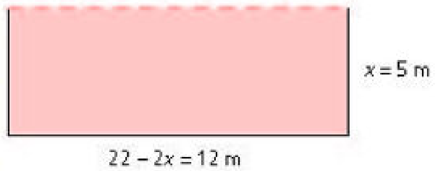
Esta ecuación tiene dos soluciones distintas. Compruébalo.

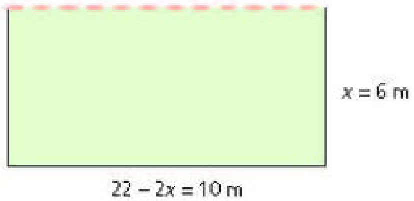
$x_1 = 6$

$x_2 = 5$

Soluciones del problema:

Cada una de las soluciones de la ecuación permite construir un corral distinto. En cada caso se utilizan 22 m de tela metálica y el área es 60 m^2.





Ten en cuenta

Cualquier ecuación de segundo grado, una vez simplificada y ordenada, queda en la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
Estas ecuaciones pueden tener dos, una o ninguna solución.

DECIDE

Contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. Escribe en forma general las siguientes ecuaciones cuadráticas y comprueba las soluciones que se proponen:
   a) $3(x^2 + 4) = 0$ soluciones: -4 y 1
   b) $x^2 = 3x$ soluciones: 0 y 3
   c) $(2x + 1)2 = 4$ soluciones: $2\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$
   d) $x^2 + 6 = x(x^2 + x - 1)$ soluciones: -2 y 3

COMUNICA

Comenta y compara tus respuestas con las de tus compañeros; resuelvan sus dudas con ayuda del profesor y juntos elaboren una conclusión.

IDENTIFICA

En $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ para que sea de segundo grado, puede ocurrir que falte alguno de los dos términos, en cuyo caso la ecuación es incompleta, pero también de fácil solución.

1. Ecuaciones sin término de primer grado: $ax^2 + c = 0$.
   En este caso se despeja x^2, y se extrae la raíz cuadrada, si es posible.

$$x^2 - 9 = 0 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Ya sabemos que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas opuestas. Así, la anterior ecuación tiene las soluciones: $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

Ejemplo:

$$5x^2 - 17 = 0 \longrightarrow 5x^2 = 17$$

$$x^2 = \frac{17}{5} = 3.4 \longrightarrow x = \sqrt{3.4} \approx \pm 1.84 \quad \text{dos soluciones}$$

En cambio, la ecuación

$$2x^2 + 10 = 0 \longrightarrow x^2 = -5$$

no tiene ninguna solución, porque los números negativos carecen de raíz cuadrada.

2. Ecuaciones sin término independiente: $ax^2 + bx = 0$.
   Se saca x como factor común y queda un producto de dos factores igual a 0, lo que implica que alguno de los dos factores debe ser igual a 0:

$$2x^2 + 7x = 0 \longrightarrow x(2x + 7) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 7 = 0 \longrightarrow x = -\frac{7}{2} = -3.5 \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones.
En este caso son $x_1 = 0$ y $x_2 = -3.5$

CONSTRUYE

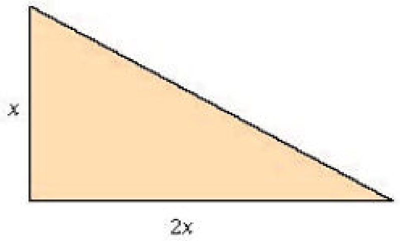
Después de analizar y reflexionar los casos anteriores, resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones. Expón tus resultados ante el grupo.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8} = 0$
   b) $(2x + 3)^2 - 12x = 0$
   c) $3x^2 = 5x + 9x^2$
   d) $y^2 + 15 = 0$
   e) $50 = 2x^2$
   f) $-8x^2 + 135x = 0$

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. Si a un número se le resta su cuadrado, se convierte en su mitad. ¿De qué número se trata?
2. Expresa la ecuación que representa el área del siguiente triángulo rectángulo.



COMUNICA

Comenta y compara tus respuestas con las de tus compañeros. Describe qué procedimiento utilizaste en cada una. Con ayuda de su profesor expresen las ecuaciones que obtuvieron como el producto de dos factores. Redacten sus conclusiones.

Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo con tus compañeros para resolver los siguientes problemas. Escriban sus procedimientos y argumenten sus respuestas.

El problema del bambú del siglo IX en la India

Una vara de bambú que mide 30 codos y se eleva sobre un terreno plano se rompe por la fuerza del viento. Su extremidad toca el suelo a 16 codos de su pie. ¿A qué altura se rompió?	

Una cuestión para geometría

Si dos números son iguales, sus cuadrados también lo son; pero si los cuadrados de dos números son iguales, ¿puede asegurarse que los números son iguales?	

Una cuestión para reflexionar

¿Qué condición debe cumplir una ecuación de segundo grado para que una de sus raíces sea igual a 0? Escribe un ejemplo que represente la situación.	

Resumiendo

En este apartado estudiamos que cualquier ecuación de segundo grado queda en la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Estas ecuaciones pueden tener dos, una o ninguna solución.

Cuando en esta ecuación falta alguno de los términos se dice que la ecuación es incompleta.

1. Cuando el término que falta es el de primer grado se obtienen dos tipos de resultado al despejar a x^2:
   a) Si el valor de x^2 es un número positivo, el resultado puede ser igual a las dos raíces cuadradas opuestas.
   b) Si el valor de x^2 es un número negativo, la ecuación no tiene solución, porque los números negativos carecen de raíz cuadrada.
2. Cuando el término que falta es el independiente siempre se obtienen dos soluciones, resultado de la factorización de la ecuación, ya que se saca a x como factor común y queda un producto de dos factores igual a cero. Esto quiere decir que alguno de esos dos factores es igual a 0.

Figuras y cuerpos

2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Las figuras geométricas que construyes en el plano pueden considerarse como partes que se repiten, de tal manera que cuando dibujamos una, las otras se pueden obtener trasladando o girando la figura o molde; un ejemplo de ello lo podemos observar en los pavimentos, pisos, mosaicos y adoquines.

Explora en internet

Visita la siguiente página para aprender más acerca de las traslaciones y giros.

http://www.vitutor.com/geo/vec/traslaciones.html

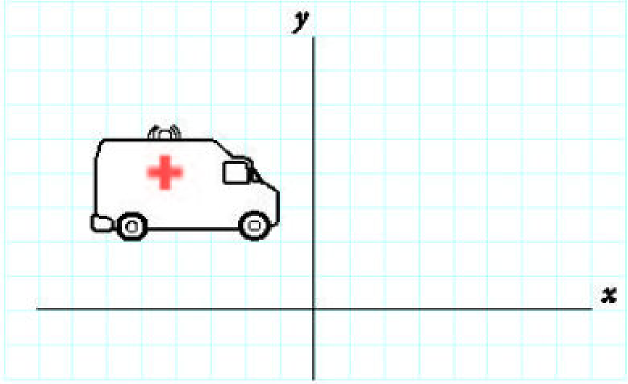
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

IDENTIFICA

Ver a través de un espejo es una situación cotidiana por lo que su efecto pasa desapercibido para la mayoría de la gente, de tal manera que olvidamos fácilmente las características de la reflexión, principalmente cómo es que se conservan los ángulos y las distancias. Entonces, ¿qué es lo que no se conserva con la reflexión? Para saberlo escribe una oración, la que tú desees, y colócala frente al espejo. Trata de leer la imagen en el espejo, ¿qué sucedió?

Para demostrarlo analiza esta situación.

Reproduce la figura siguiente en una hoja cuadriculada, considera la referencia proporcionada por los ejes coordenados.



CONSTRUYE

Reflexiona la actividad anterior y realiza en tu cuaderno las siguientes actividades:

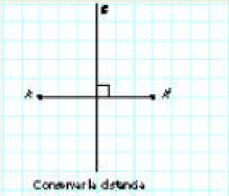
1. Traza la figura considerando al eje y como eje de simetría.
   ¿Son figuras idénticas? De no ser así, ¿qué diferencia observas?
2. Elige un punto de la figura original.
   a) ¿Qué distancia hay con el eje y?
   b) ¿Qué distancia hay con el punto simétrico?
   c) ¿Qué observas en los ángulos de la figura simétrica?
3. En grupo escriban las propiedades de la simetría axial.

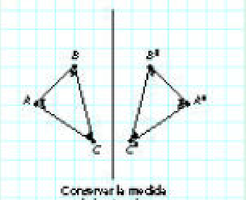
Ten en cuenta

La *simetría axial* respecto de un eje tiene las siguientes propiedades:

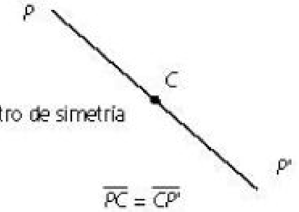
a) Los puntos simétricos están a igual distancia, en forma perpendicular, del eje de simetría; es decir, conservan la distancia.

b) Las figuras simétricas son iguales, y aunque están orientadas en distintos sentidos conservan la medida de los ángulos.

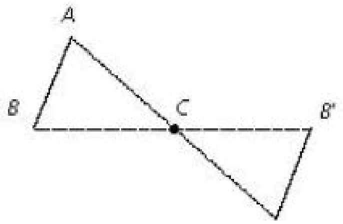




Otro tipo de reflexión, diferente de la anterior, es la simetría central. En ésta se obtiene el simétrico respecto de un punto; por ejemplo:



El punto *P* está a la misma distancia del punto *C*, igual que el punto *P'*. La siguiente simetría central es de un segmento.



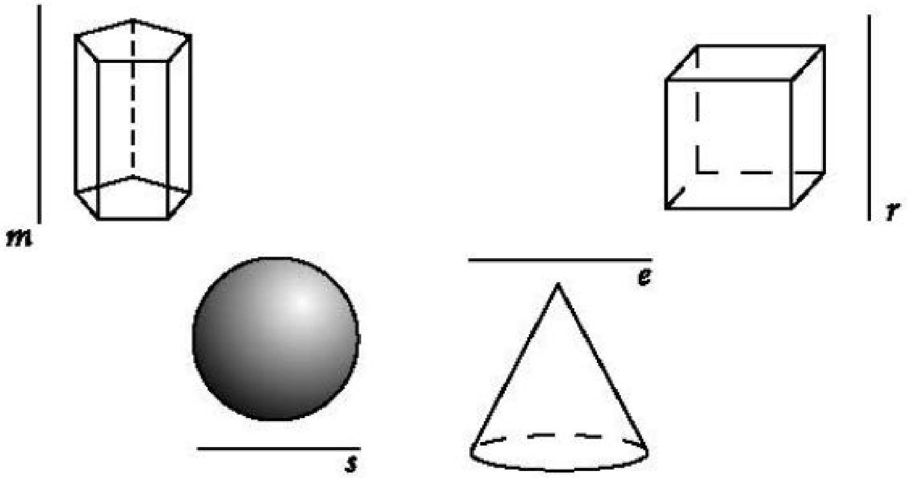
COMUNICA

Estudia las características y propiedades de la simetría central y exponlas al grupo para sacar conclusiones. Realicen la simetría central a una figura para verificarlas.

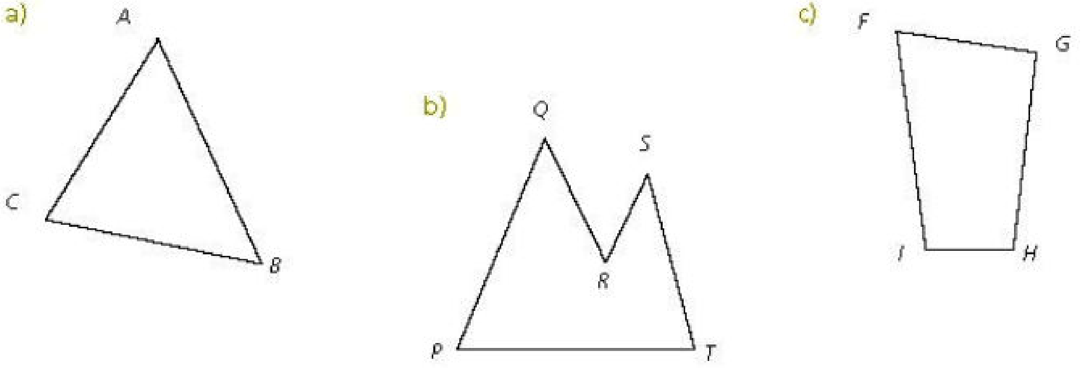
DECIDE

Con base en lo estudiado anteriormente resuelve lo siguiente.

1. Realiza la simetría axial de las siguientes formas.



2. Realiza la simetría central de los siguientes polígonos.



3. Traza tres objetos de la naturaleza que tengan simetría axial o central.
4. Escribe tres ejemplos donde descubras la simetría axial y central.
5. Construye el simétrico para cada figura con respecto al eje indicado.

COMUNICA

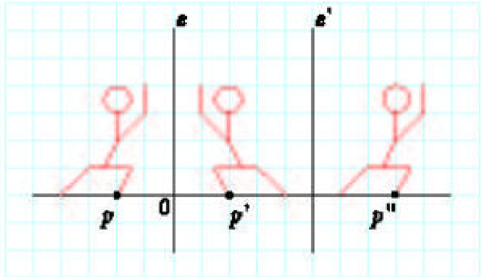
Forma equipo con tres compañeros y discutan la relación que encuentren entre dos simetrías axiales sucesivas a través de dos ejes perpendiculares con la simetría central, cuyo centro de simetría está en la intersección de los dos ejes. Pidan ayuda a su profesor si es necesario. Redacten sus conclusiones sobre las propiedades de la simetría axial y central.

Algo esencial

Según el diccionario, *traslación* es la acción de trasladar la figura por medio de un desplazamiento en el plano y sobre una recta. En toda traslación se conservan las distancias y los ángulos ya que se transforman los segmentos en segmentos iguales y los ángulos en ángulos iguales.

IDENTIFICA

El siguiente objeto ha sido reflejado dos veces con respecto a los ejes *e* y *e'*. ¿Cuáles son las distancias entre el punto *0* y los puntos *p*?



CONSTRUYE

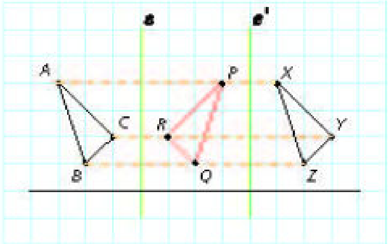
Analiza las traslaciones anteriores y realiza las actividades siguientes.

1. Utiliza una regla graduada para realizar las mediciones indicadas.
   a) Mide la distancia del punto *0* al *P*.
   b) Mide la distancia del punto *0* al *P'*
   c) Mide la distancia del punto *0* al *P''*
   d) Mide la distancia del punto *P* al *P''*
   e) Mide la distancia entre los ejes *e* y *e'*
2. ¿Qué puedes concluir de las mediciones realizadas entre los ejes y la distancia del punto *p* y el punto *p''*?
3. La siguiente actividad requiere que realices en tu cuaderno lo descrito en ella y reproduzcas la figura.

Sea *ABC* un triángulo.
   a) Traza su simétrico con respecto a un eje de simetría.
   b) Al simétrico que resulte le llamamos *PQR*.
   c) Al triángulo *PQR* le aplicamos otra vez el procedimiento para obtener su simétrico y le llamamos *XYZ*.

Al aplicar una doble reflexión a una figura con los ejes *e* y *e'* paralelos se forma una traslación de la figura. ¿Cómo se observa en la figura?

Si los dos ejes son paralelos, *e* y *e'*, la traslación tiene una amplitud del doble de la distancia entre los ejes; por ejemplo, la distancia del punto *B* al *Z* es de ocho unidades y la distancia de separación entre los ejes *e* y *e'* es de cuatro unidades. Verifícalo en la ilustración de la derecha.



COMUNICA

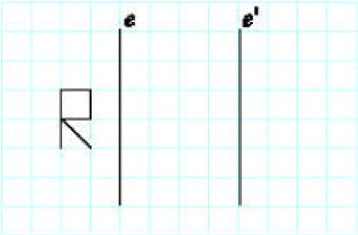
Comenta con tus compañeros algunas ideas para simplificar el procedimiento.

DECIDE

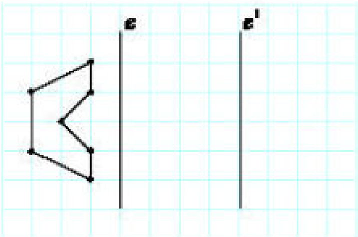
Realiza lo siguiente en equipo utilizando las estrategias que propusieron, durante la sesión de Comunica.

1. Aplica una doble reflexión para producir una traslación a cada una de las figuras:

a)

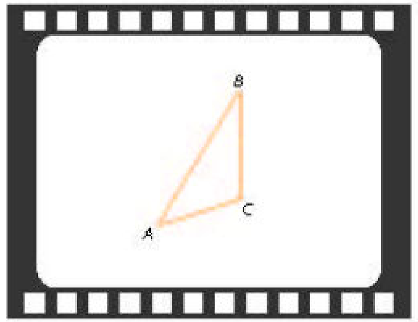


b)



2. Las siguientes figuras representan el procedimiento que un alumno realiza para trasladar el triángulo *ABC*. Escribe sobre las líneas las acciones que se realizaron en cada una.

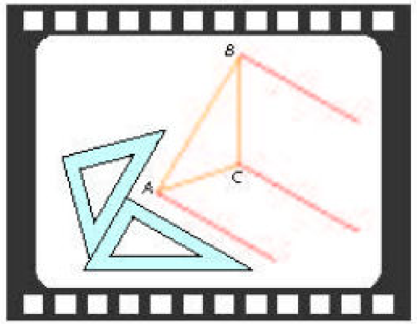
Escena 1



____

____

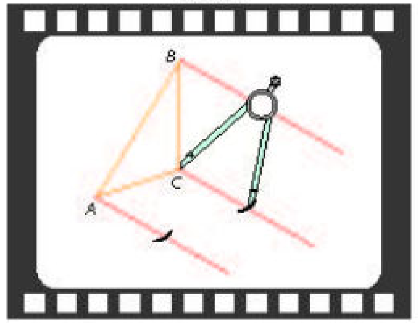
Escena 2



____

____

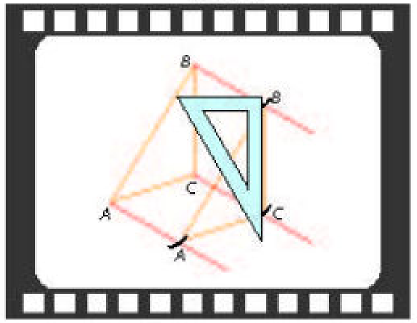
Escena 3



____

____

Escena 4



____

____

3. Forma un equipo para realizar las dos actividades siguientes.
   a) Lean con atención y analicen la sección Ten en cuenta.
   b) Utilicen sus escuadras y el compás para trasladar cada una de las siguientes figuras a la distancia indicada en cada caso:

Ten en cuenta

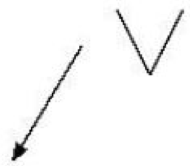
Se dice que una figura es traslación de otra si los segmentos que conforman las dos figuras se corresponden y:
a) Tienen las mismas medidas.
b) Son paralelas entre sí.

COMUNICA

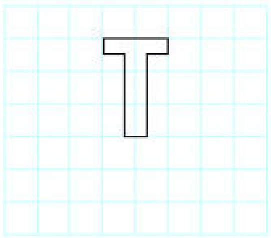
Expón ante el grupo si la información de Ten en cuenta es verídica o no. Argumenta tu respuesta y escribe en tu cuaderno las conclusiones.

i)

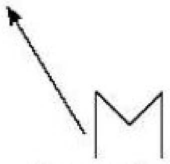
ii) 8 cm en esta dirección



iii) 6 cm hacia abajo



iv)

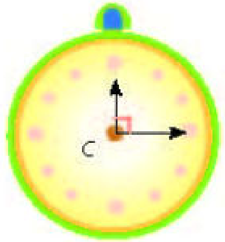


5 cm en esta dirección

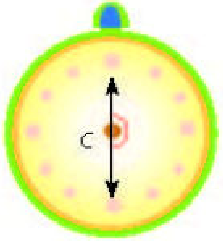
Algo esencial
El ángulo que gira para rotar las manecillas del reloj se llama *ángulo de rotación* y el punto C se llama *centro de rotación*.

IDENTIFICA

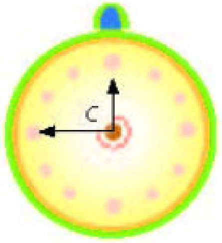
Escribe el ángulo que se forma en cada una de las siguientes figuras.



____



____



____

Ten en cuenta

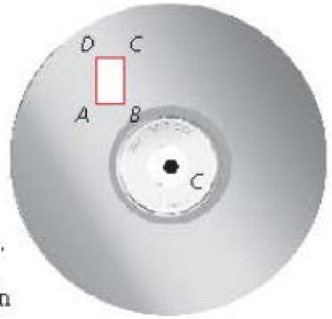
Al trasladar una figura, la figura original se corresponde con la formada por la traslación donde los lados correspondientes son los lados homólogos. Identifica en tu entorno algunas figuras donde se manifieste una traslación e identifica los lados homólogos.

CONSTRUYE

Como puedes observar, la idea de rotación está presente en el movimiento de las manecillas del reloj.

1. ¿En qué otras situaciones cotidianas descubres la rotación?
2. Escríbelas y explica por qué.

DECIDE

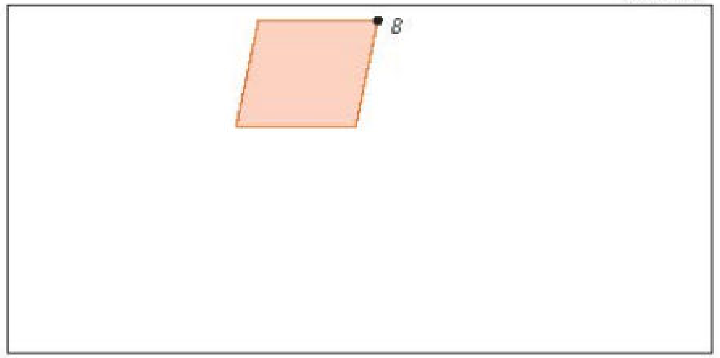


Realiza las siguientes actividades para descubrir otra de las propiedades de la rotación.

1. Utiliza un CD como plano circular y recorta un rectángulo; colócalo sobre el CD como se observa en la figura.
   a) Sujeta el CD de una manera que pueda girar sobre su centro C.
   b) Gira el CD el ángulo que desees; registra la rotación midiendo con el transportador.
   c) Traza las rotaciones en tu cuaderno.
2. El centro de rotación de las siguientes figuras se localiza en el vértice. Traza la rotación indicada.

Rotar 180°

Rotar 90°



Rotar 60°

Ten en cuenta

El centro de rotación puede estar fuera de la figura.

Ten en cuenta

El centro de rotación puede estar en uno de los vértices de la figura.

3. El centro de rotación se localiza en el interior de la figura y está indicado con el punto. Completa la tabla con el dibujo que se forme después de rotar la figura.

Ten en cuenta

El centro de rotación también puede estar en el centro de la figura.

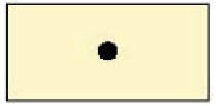
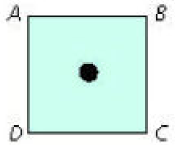
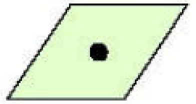
Figura	Rotar	Figura final
	45°	
	90°	
	180°	

Tabla 2.3

COMUNICA

Expón ante el grupo tu procedimiento para rotar figuras y entre todos determinen cómo son los lados y los ángulos de la figura original y de la final. Además, indiquen cómo se obtiene la medida del ángulo de rotación. Escribe en el cuaderno las conclusiones que obtuvieron.

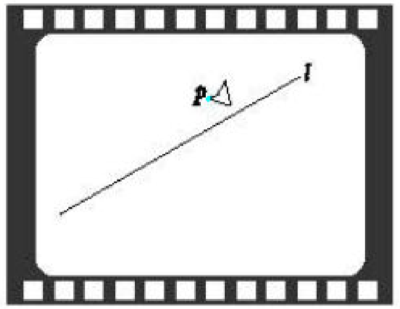
Manejo de técnicas con eficiencia

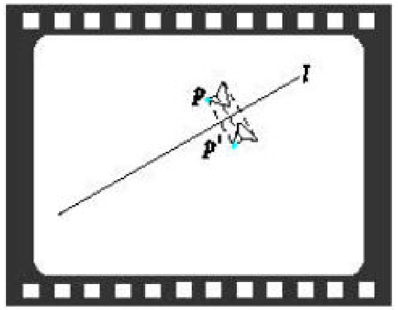
Rotación de figuras

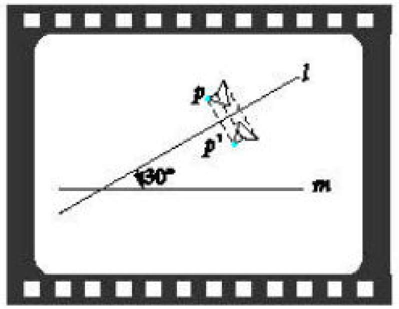
Para llevar a cabo la siguiente actividad debes tener a la mano un transportador, un compás, una regla graduada y lápiz.

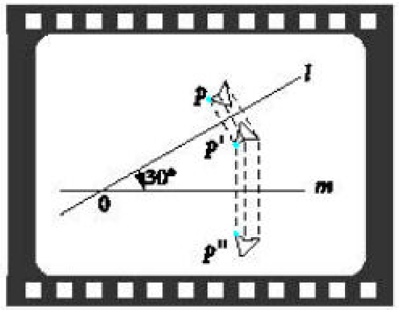
A continuación se presenta una cinta de película, en ella se observa cómo construir una transformación geométrica.

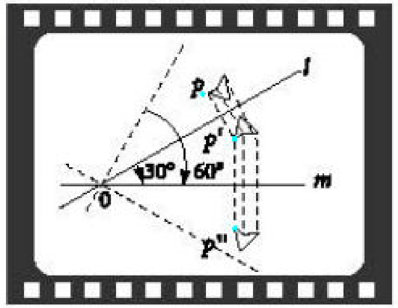
1. Reproduce en tu cuaderno las imágenes que se presentan en la cinta y escribe la acción que realizarías utilizando tu juego de geometría.

a) 

b) 

c) 

d) 

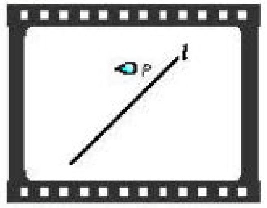
e) 

2. Realiza las rotaciones en tu cuaderno según tus notas. Expresa al grupo tus respuestas y elaboren sus conclusiones.

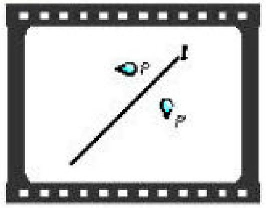
Esta doble reflexión nos permite construir otra transformación geométrica a la que llamaremos rotación; así, la rotación se puede obtener de una doble reflexión con la característica de que si las dos rectas son secantes, la rotación tiene una amplitud del doble del ángulo entre las rectas, como se muestra en la última figura.

1. Escribe debajo de cada imagen cómo deben construirse con regla y transportador.

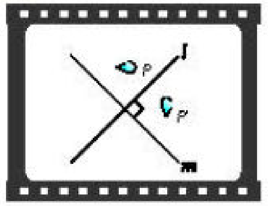
a)



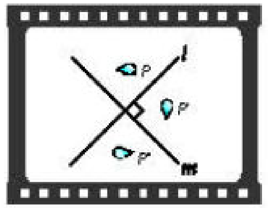
b)



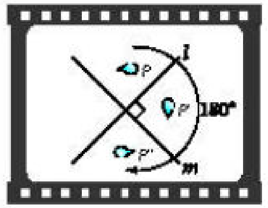
c)



d)



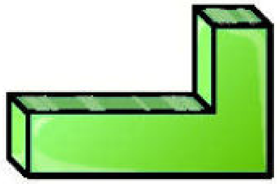
e)



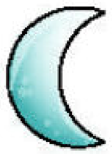
2. Según tus anotaciones, constrúyelas en tu cuaderno. Ajusta si es necesario y preséntalas al grupo.

Como las rectas son perpendiculares se obtiene una rotación de 180°, de esta manera se forma una simetría central.

3. Pon en práctica lo aprendido sobre rotaciones:
   a) Investiga sobre plantas, árboles o frutos donde se presente el fenómeno de rotación.
   b) Dibuja algunos objetos de tu entorno donde esté presente la transformación de rotación.
   c) Estudia el fenómeno de rotación en el reloj.
   d) Rota 30° la siguiente figura en el sentido de las manecillas del reloj.

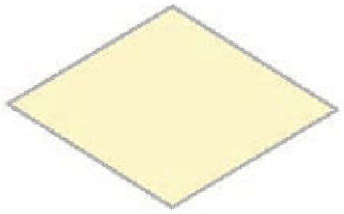


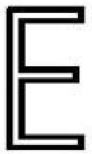
   e) Rota 90° la siguiente figura en el sentido de las manecillas del reloj.



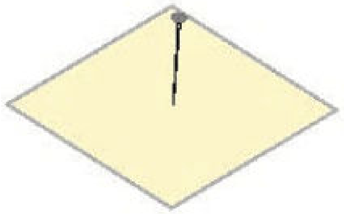
4. Para la siguiente actividad necesitas:
   - Tijeras
   - Cartulina
   - Aguja o alfiler
   - Regla
   - Transportador

   a) Traza varias figuras y recórtalas.
   Por ejemplo:

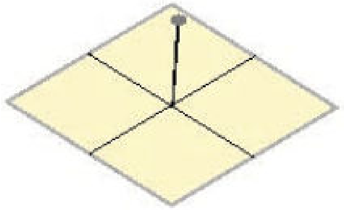




   b) Coloca el alfiler en el centro de la figura.



   c) Marca los ejes en la figura.



5. Rota la figura 60º, para ello utiliza el transportador.
6. Traza la figura antes y después de ser rotada.
7. Con las otras figuras realiza rotaciones diferentes.
8. Escribe tus conclusiones y coméntalas con el grupo.

Explora en internet

Entra en la siguiente página para aprender acerca de los frisos.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/frisos/frisos.htm

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Resumiendo

En este apartado estudiamos las características de las transformaciones geométricas que se derivan de la reflexión aplicada dos veces:

1. Se estudiaron las características de la simetría (que básicamente son dos: la primera es que conservan las distancias y la segunda que conservan la medida de los ángulos).
2. Traslación: se produce cuando la reflexión es doble y los ejes de simetría son paralelos.
3. Rotación: se produce cuando la reflexión es doble y los ejes son perpendiculares (90°) o secantes.

2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

El motor de un automóvil está conformado por una extraordinaria cantidad de piezas de diferentes formas y tamaños, cumpliendo diferentes funciones. Un diseñador puede ver en su mente la forma de la pieza, determinar de qué material debe hacerse, cómo se colocará con respecto a los otros y qué función desempeñará.

No obstante, el diseñador no es el constructor de la pieza; la persona que la va a maquinar necesita conocer en detalle lo que pasó por la mente del diseñador, requiere un plano de la pieza; pero a la vez si el plano le muestra únicamente la forma de un rectángulo, no puede saber si esa figura es una cara de un prisma o si se trata de la cara lateral de un cilindro.

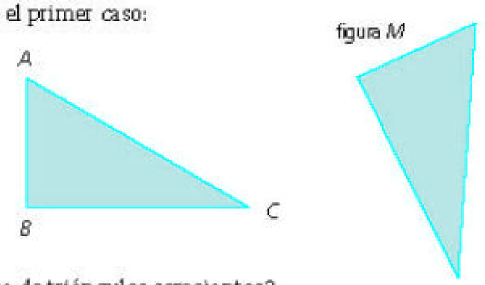
Una pieza de maquinaria debe mostrarse en todas las posiciones posibles, de tal manera que impliquen la rotación y la traslación de figuras, como se muestra en la imagen de los tornillos.

Al rotar y trasladar los objetos, éstos mantienen la forma y el tamaño. Al trasladarlos sólo cambia la ubicación de la figura, mientras que al rotarlos, la figura cambia su posición y ubicación.

IDENTIFICA

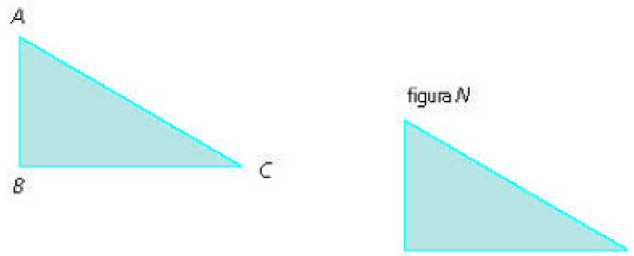
Una figura geométrica puede mostrarse en diferentes posiciones. En el caso de los cuadrados, sin importar su posición, se puede afirmar que todos son semejantes, pero no es el caso de los triángulos.

1. Analiza el primer caso:



¿Se trata de triángulos semejantes?

2. Analiza el siguiente caso:



En cada uno de los casos presentados, ¿puedes identificar los vértices A', B', C' correspondientes a los vértices A, B, C de las figuras originales?

CONSTRUYE

Reflexiona tus respuestas a las preguntas anteriores y responde lo que se solicita a continuación.

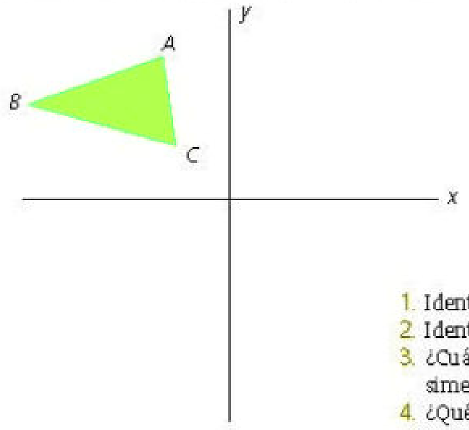
1. ¿Puedes afirmar que en el primer caso ocurrió una rotación y en el segundo una traslación?
2. En el caso de la traslación, ¿qué tipo de simetría estuvo presente?
3. Efectúa los trazos necesarios para demostrar que efectivamente ocurrió o no lo que se afirma en el primer punto.
4. ¿Es posible, partiendo de la figura original, obtener la figura N y a partir de ésta obtener la figura M?

COMUNICA

Comparte tus respuestas con otros compañeros. Verifiquen sus trazos y la forma en que respondieron a las preguntas planteadas. Registren sus conclusiones.

IDENTIFICA

El triángulo escaleno mostrado tiene como vértices los puntos ABC.



1. Identifica los posibles ejes de simetría.
2. Identifica un posible punto de homotecia.
3. ¿Cuál es la diferencia entre simetría axial y simetría central?
4. ¿Qué ocurre con la figura en cada caso?

CONSTRUYE

Retoma la figura anterior y realiza los trazos que se indican:

1. Toma el eje y como eje de simetría y refleja la figura. El triángulo resultante tendrá como vértices $A'B'C'$.
2. Ahora refleja la imagen del triángulo $A'B'C'$ empleando el eje x como eje de simetría. El triángulo así obtenido tendrá vértices $A''B''C''$.
3. ¿Es posible obtener el triángulo $A''B''C''$ del triángulo original ABC en un solo movimiento? Compruébalo efectuando los trazos necesarios.

COMUNICA

Comparte tus respuestas con otros compañeros y en sesión grupal analícenlas y determinen con ayuda de su profesor, cuál es la relación entre las dos reflexiones y la simetría central. Registren sus conclusiones.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Reúnete con un compañero y cada uno efectúe los trazos que se solicitan. Vayan comparando el avance de su trabajo, verificando que los trazos se efectúen correctamente cada vez.

1. Analiza la figura del cuadrante I y da nombre con una letra a cada uno de los vértices, por ejemplo A, B, etc. En cada nuevo cuadrante los vértices correspondientes se nombrarán $A1$, $B1$; $A2$, $B2$; $A3$, $B3$, y así sucesivamente.
2. Traza una figura homotética de las mismas dimensiones en el cuadrante V.
3. Refleja la imagen obtenida en el cuadrante II.
4. Refleja la imagen del cuadrante II en el cuadrante III.
5. Traslada la imagen del cuadrante III al cuadrante VI.
6. ¿Es posible mediante un solo movimiento obtener la figura en el cuadrante VI a partir de la figura en el cuadrante I?

I 	II	III
IV	V	VI

Tabla 2.4

Resumiendo

Cuando se nos presenta un eje de simetría tenemos la posibilidad de trasladar una figura o de reflejarla. En el primer caso obtenemos la misma figura en la misma posición, en el segundo caso sería como una figura reflejada en un espejo.

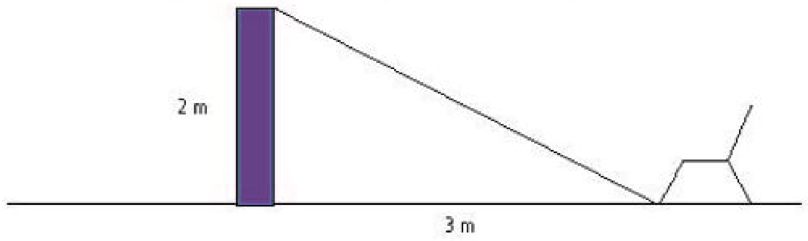
Un punto de homotecia nos permite construir una simetría axial. Si la figura que se construye queda al otro lado del centro de simetría, esto equivale a obtener una rotación a 180°.

Si una figura se refleja dos veces consecutivas, primero con respecto a un eje y luego con otro a 90°, se obtiene el equivalente a una rotación a 180°.

Medida

2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

A menudo se presentan situaciones en las cuales no es posible efectuar mediciones de manera directa. En el siguiente esquema se muestra una barda de 2 m de altura que separa dos terrenos. En el terreno de la derecha, el dueño quiere tender una cuerda de lo alto de la barda hasta el pie de una banca que se encuentra a 3 m de la barda.



Para hacer esto cuenta con un tramo de cuerda de 3.5 m de longitud. ¿Le alcanzará?

Muchos pensarán que lo más sencillo es que el hombre se suba a la barda y amarre la cuerda. Después bajar, acercar la cuerda a la banca y entonces podrá comprobar si le alcanza o tiene que comprar otra.

En muchas situaciones esto no resulta práctico, y es mucho más sencillo, mediante un breve cálculo, determinar si lo que queremos hacer es procedente o no.

La figura que se forma es un triángulo rectángulo. En esta lección aprenderás las relaciones que se pueden establecer entre sus lados.

Explora en internet

Visita la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/triangulos-rectangulos.html
Esta página te mostrará la característica fundamental de un triángulo rectángulo y los dos tipos que existen.
Fecha de consulta: 30 de enero de 2017.

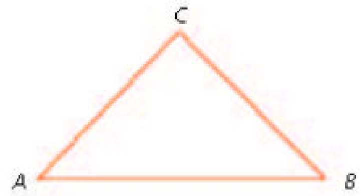
IDENTIFICA

Analiza la siguiente figura y responde a las preguntas.

1. ¿Qué nombre recibe la figura?
2. ¿Qué nombre reciben las líneas trazadas de vértice a vértice?
3. ¿Cuántas figuras se forman al trazar estas dos líneas y qué nombre reciben?

CONSTRUYE

1. Calca en tu cuaderno ocho triángulos iguales al triángulo mostrado.



2. Ilumina los triángulos con cuatro colores diferentes, deben quedar cuatro parejas del mismo color.
3. Recorta los ocho triángulos.
4. Calca una vez más el triángulo en tu cuaderno. ¿Qué tipo de triángulo es?
5. Empleando los triángulos que recortaste arma tres cuadrados que coincidan con cada uno de los lados del triángulo que acabas de calcar. Asegúrate de que no queden dos triángulos del mismo color en un mismo cuadrado.

DECIDE

Analiza la figura que formaste y responde las preguntas:

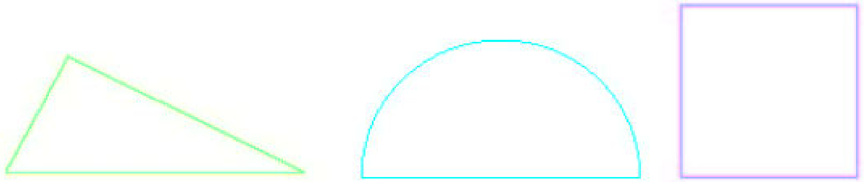
1. ¿Se altera la construcción si intercambias los colores de los triángulos?
2. ¿Existe otra manera de construir los cuadrados usando más o menos triángulos?
3. ¿Tus compañeros llegaron a la misma construcción?
4. ¿Qué relación guardan entre sí los tres cuadrados?
5. Elabora una conclusión al respecto.

COMUNICA

Con ayuda de tu profesor comenten las conclusiones a las que llegaron. Si hay conclusiones diferentes analícenlas y determinen si efectivamente se derivan de la construcción de los cuadrados sobre los lados del triángulo. Entre todo el grupo obtengan una conclusión común.

IDENTIFICA

Observa las siguientes figuras:



1. ¿Qué nombre darías a cada una de ellas?
2. ¿Cómo se calcula el área de cada una?
3. ¿Qué las hace diferentes?

CONSTRUYE

Reúnete con un compañero y cada uno en su cuaderno dibuje los siguientes trazos. Revisen su procedimiento y verifiquen que su trabajo va coincidiendo.

1. Calca en tu cuaderno el triángulo mostrado en la sección Identifica.
2. Con regla y compás determina los puntos medios de cada lado del triángulo.
3. Tomando cada punto medio como centro, emplea el compás para construir tres medios círculos sobre cada lado del triángulo.
4. Con tu regla mide el radio de cada semicírculo y calcula las tres áreas.
5. Vuelve a calcar el mismo triángulo.
6. Empleando escuadras y regla traza un cuadrado sobre cada lado del triángulo.
7. Con la regla mide el lado de cada cuadrado y calcula las tres áreas.
8. Verifica que tus medidas y el valor de las áreas calculadas coincidan con las de tu compañero, si no, revisen su procedimiento y corrijan lo que sea necesario.

DECIDE

Forma equipo con un compañero y determinen qué se puede hacer con las áreas que calcularon. Después respondan en el cuaderno lo siguiente.

1. Analicen primero las áreas de los semicírculos, ¿se puede establecer alguna relación entre las tres cantidades?
2. Revisen ahora el área de los cuadrados, ¿se puede establecer alguna relación entre las tres cantidades?
3. ¿Qué semejanzas o diferencias resultan de la comparación de las áreas de los semicírculos respecto a las de los cuadrados?
4. Traza un triángulo rectángulo de dimensiones diferentes y repite la experiencia trazando cuadrados y semicírculos.
5. ¿Se mantienen las relaciones o hay cambios?
6. Elaboren una conclusión conjunta.

COMUNICA

Comparte tu conclusión con otros compañeros con ayuda de su profesor. Si tienen una postura diferente analicen los trazos y los datos para determinar dónde se genera la diferencia y si tiene o no validez.

Profundizando

Sobre cualquier triángulo rectángulo es posible construir algún polígono regular, tomando como lado del polígono el lado del triángulo. De esta manera se pueden construir cuadrados, pentágonos, hexágonos, entre otros; sin embargo, el hecho de tomar como lado de la figura el lado del triángulo, no necesariamente garantiza que se podrá establecer la misma relación entre las áreas de todas las diferentes figuras.

Prueba a construir hexágonos sobre los lados del mismo triángulo y calcula sus áreas. Después compáralas con las relaciones que obtuviste al construir cuadrados y semicírculos.

Resumiendo

En un triángulo rectángulo se puede construir un polígono regular, donde uno de sus lados sea el lado del triángulo.

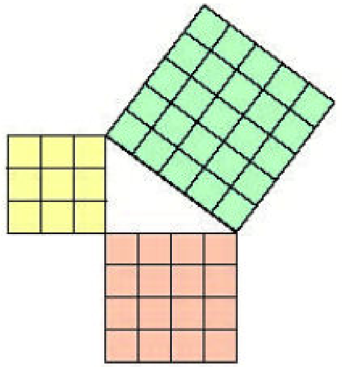
Para el caso concreto del cuadrado, se puede establecer una relación constante entre las áreas de los cuadrados construidos, sin importar las dimensiones del triángulo, mientras se trate de un triángulo rectángulo.

2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Pitágoras nació en la isla de Samos, colonia jónica de los griegos en las costas del mar Egeo, en la primera mitad del siglo VI a.n.e. Viajó a Egipto, Fenicia y Babilonia. Más tarde viajó al sur de Italia, donde fundó en Crotona la fraternidad pitagórica. Se piensa que en sus viajes recogió información de distintas civilizaciones que le sirvió de base para demostrar el teorema que lleva su nombre.

IDENTIFICA

La siguiente figura está compuesta por tres cuadrados y cada cuadro representa una unidad cuadrada.



¿Cuántas unidades cuadradas tiene toda la figura?

Ten en cuenta

En un rectángulo se indican los catetos y la hipotenusa.

CONSTRUYE

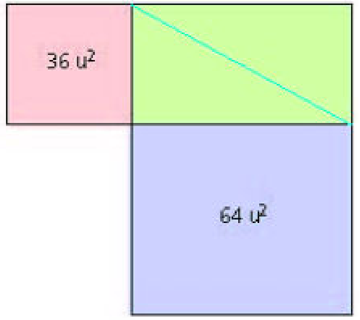
Analiza el planteamiento anterior y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el cuadrado mayor?
2. ¿Cuántas unidades cuadradas tienen el cuadrado mediano y el cuadrado menor?
3. ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Explícala.
4. En el centro de la figura se forma un triángulo. Identifica su base y su altura.
5. Indica si hay relación entre la medida de los lados del triángulo y las áreas de los cuadrados que forman al triángulo.

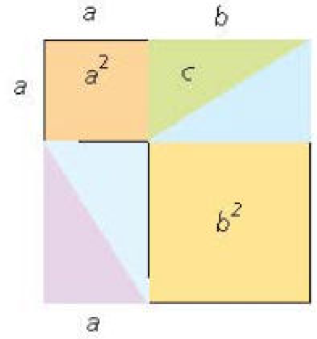
DECIDE

Analiza la siguiente figura y responde lo siguiente:

1. Determina el valor de la diagonal del rectángulo cuya base mide 8 unidades y 6 unidades de altura.
2. Escribe en el cuaderno tu procedimiento y comparte tu explicación con tus compañeros.



3. Calca y recorta la siguiente figura. Manipula las piezas como un rompecabezas para construir otra.



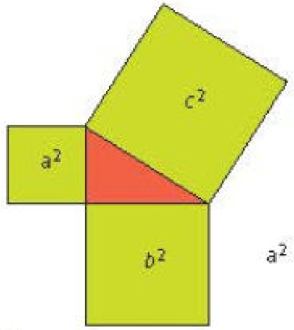
4. Contesta lo siguiente:
   a) ¿Cuántas figuras diferentes puedes construir?
   b) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado de la figura?
   c) El área del cuadrado *A* está formada por dos cuadrados y dos rectángulos. Calcula sus áreas.
   d) ¿Qué relación hay entre los cuadrados de la figura y el de las figuras que construiste?

Con frecuencia nos encontramos en situaciones donde no somos capaces de medir las longitudes que requerimos para determinar las medidas de objetos; por ejemplo, no podemos medir directamente la longitud de un edificio muy elevado o una distancia inaccesible.

En estos casos utilizamos las medidas indirectas aplicando nuestros conocimientos sobre triángulos, y para ampliar este conocimiento es pertinente hablar de los triángulos rectángulos.

IDENTIFICA

Observa la siguiente figura y explica qué relación existe entre el triángulo, los cuadrados y la ecuación.



$a^2 + b^2 = c^2$

CONSTRUYE

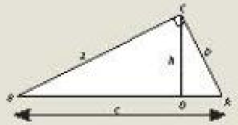
Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Anota el enunciado que relaciona el área de los cuadrados de la figura.
2. Escribe la expresión algebraica.
3. ¿Cómo se llama este resultado?

Ten en cuenta

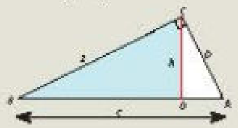
El teorema de Pitágoras se puede demostrar a partir del teorema de Tales, como se muestra a continuación.

1° Se dibuja en un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa. Se obtienen así dos triángulos rectángulos semejantes al primero.



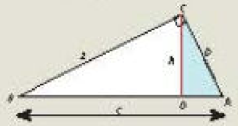
2° El triángulo ABC es semejante al triángulo BCD por tener los ángulos iguales.

$\frac{m}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow a^2=mc$



3° El triángulo ABC también es semejante al triángulo ADC por tener los ángulos iguales.

$\frac{n}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^2=nc$



4° Por tanto, si se suman las dos expresiones de los pasos 2° y 3° se tiene:

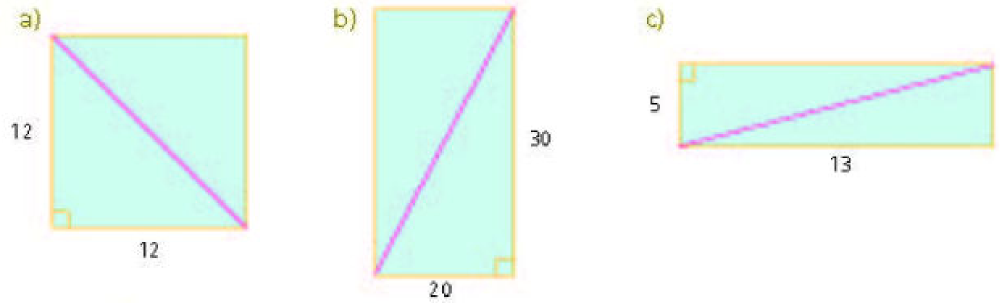
$a^2+b^2=mc+nc=[m+n]\,g\,c=c\,g\,c=c^2$

Que es el enunciado del teorema de Pitágoras.

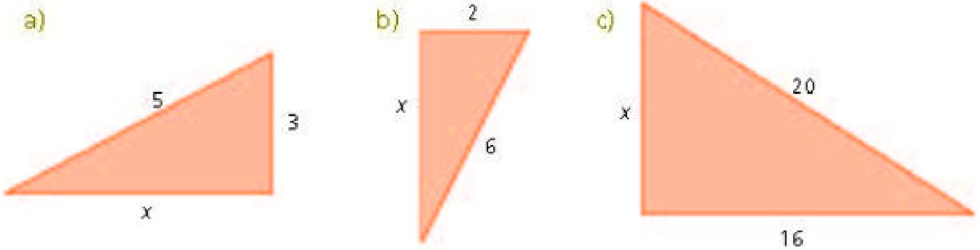
DECIDE

De acuerdo con las actividades anteriores responde lo siguiente:

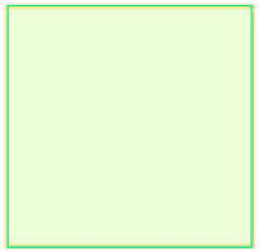
1. Utiliza el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de la diagonal en cada figura.



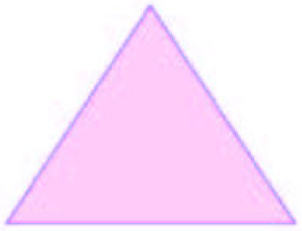
2. Calcula las longitudes que faltan en las figuras siguientes.



3. Para resolver los siguientes problemas utiliza el Teorema de Pitágoras y compruébalo construyendo el polígono.
   a) En un cuadrado cuyo lado mide 3.7 cm, ¿cuánto mide su diagonal?



   b) En un triángulo equilátero de 4 cm por lado, ¿cuánto mide su altura?



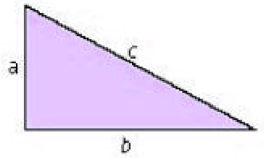
   c) En un rectángulo cuya base mide el doble de su ancho, ¿cuánto mide su diagonal? Escribe en tu cuaderno la expresión algebraica que la representa y traza un ejemplo.

COMUNICA

Analiza tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escriban sus conclusiones.

IDENTIFICA

Las letras b, c y a, que verifican la relación $a^2 + b^2 = c^2$, forman una terna pitagórica. Explica por qué.



$c^2 = a^2 + b^2$

CONSTRUYE

Los siguientes datos corresponden a la medida de los lados de triángulos. ¿Cuáles de ellos forman ternas pitagóricas?

a) $b = 3$ $c = 4$ $a = 5$
b) $b = 3$ $c = 6$ $a = 8$
c) $b = 6$ $c = 8$ $a = 10$
d) $b = 12$ $c = 16$ $a = 20$

DECIDE

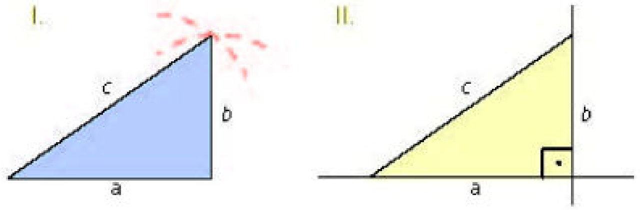
De acuerdo con las actividades anteriores, responde lo siguiente:
En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si los catetos miden 5 cm y 12 cm, calcula el valor de la hipotenusa.

COMUNICA

Comparte tu estrategia de solución del problema anterior con tus compañeros. Discutan las diferencias entre cada procedimiento y escribe tus conclusiones.

IDENTIFICA

A continuación se realizan dos construcciones. Toma en consideración que a tiene un valor de 5 cm, b de 12 cm y c de 13 cm.



El triángulo I se construye a partir de los tres lados a, b y c.
El triángulo II se construye tomando los lados a y b sobre un ángulo recto.
¿Consideras posibles estos procedimientos de trazo? Argumenta tu respuesta.

CONSTRUYE

Considerando la información anterior responde las actividades siguientes:
1. Reproduce las construcciones utilizando tu juego de geometría.
2. ¿Qué conclusión puedes obtener de las construcciones de los triángulos I y II?

DECIDE

Para trazar perpendiculares, utiliza el Teorema de Pitágoras.
1. Consideremos una terna pitagórica, por ejemplo, 3, 4, 5 y el compás.
2. En la siguiente tabla se muestra la construcción geométrica de las perpendiculares. En la columna de la derecha escribe en cada escena el procedimiento que se llevó a cabo para su trazo.

Algo esencial
Un triángulo que verifica la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$, entonces es un *triángulo rectángulo*. Si los lados de un triángulo verifican la relación de Pitágoras, el triángulo es rectángulo.

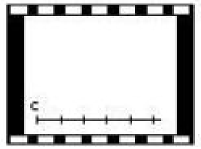
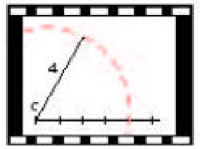
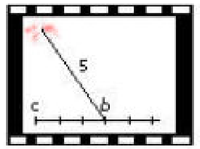
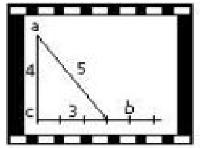
Construcción geométrica	Procedimiento
	
	
	
	

Tabla 2.5

3. Escribe en tu cuaderno la conclusión que se obtiene de realizar esta construcción.

COMUNICA

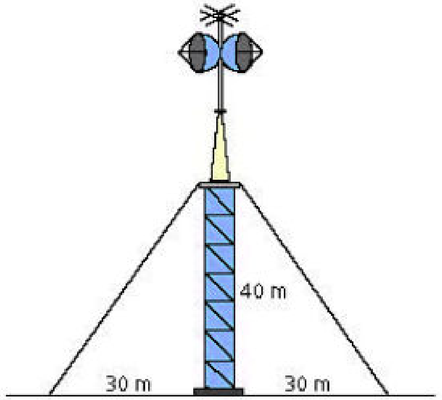
Comparte tu trabajo con tus compañeros. Discutan las diferencias que encuentren y escribe las conclusiones.

Competencia matemática en acción

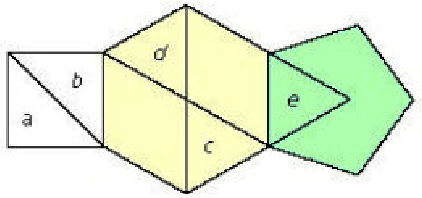
Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo con tres de tus compañeros y resuelvan estos problemas realizando las siguientes etapas.
- Comprender el problema.
- Dibujar.
- Estimar una solución.
- Escribir el procedimiento para resolver el problema.

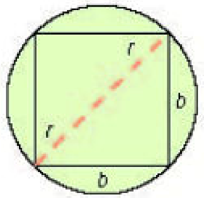
1. Un carpintero construye un marco de ventana de forma rectangular. Las dimensiones de la ventana son 90 cm y 120 cm. Para ver si el marco es un rectángulo, mide una diagonal y obtiene 151 cm. Comprueba si está bien construido.
2. Calcula la altura del triángulo isósceles de base 12 y lados 8 y 8.
3. Una antena emisora de televisión tiene 40 m de altura desde su base. Se quiere sujetar al suelo con dos cables. Si las fijaciones del suelo están a 30 m de la base del emisor, ¿cuál debe ser la longitud de estos cables?



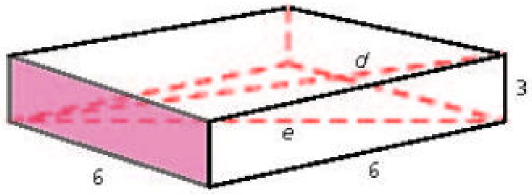
4. El cuadrado, el hexágono y el pentágono son regulares. ¿Cuáles de los triángulos son iguales?



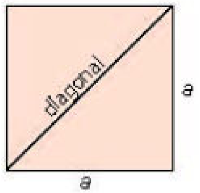
5. Calcula el lado de los cuadrados sabiendo que están inscritos en una circunferencia de radio:
   a) 18 cm
   b) 8 cm



6. Calcula las diagonales *d* y *e* del ortoedro cuyas aristas miden 6 cm, 6 cm y 3 cm.



Resolviendo problemas



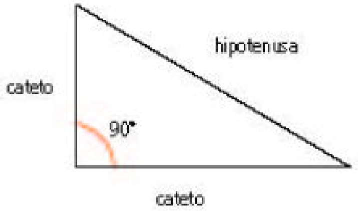
Resuelve los siguientes problemas.

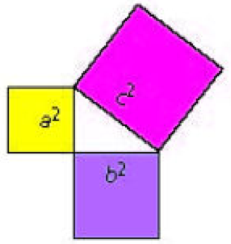
1. Calcula el lado de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide:
   a) 17 cm
   b) 8.4 cm
   c) 0.03 cm
2. Un triángulo rectángulo tiene los dos catetos iguales. ¿Qué puede decirse de los ángulos agudos correspondientes?
3. Considera verdadero o falso.
   a) La suma de dos ángulos agudos es un ángulo agudo.
   b) La diferencia de dos ángulos obtusos es un ángulo agudo.
   c) La diferencia de dos ángulos agudos es un ángulo agudo.
4. ¿Cómo se puede descomponer un triángulo *ABC* en cuatro triángulos de la misma área utilizando medianas?
5. En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros. ¿Ocurre igual con los ángulos? ¿Qué relación liga a los ángulos?
   a) Dos lados de un triángulo miden: $b = 12$ cm y $c = 20$ cm. ¿Entre qué valores puede variar la longitud del tercer lado *a*? Razona la respuesta.
   b) Dado un segmento $\overline{AB}$ traza algunos puntos que equidisten de los extremos. Si unes esos puntos, ¿qué figura forman? Indica cómo se construye.

Resumiendo

Los triángulos rectángulos tienen una propiedad conocida como Teorema de Pitágoras, que consiste en calcular la distancia entre dos puntos.

El Teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre sus catetos, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$, donde *c* representa la longitud de la hipotenusa y las letras *a* y *b* las longitudes de los catetos.





$c^2 = a^2 + b^2$

Nociones de probabilidad

2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

En muchas ocasiones nos topamos con situaciones que no pueden ocurrir al mismo tiempo. ¿Es posible que sea de día, pero al mismo tiempo de noche? ¿Podemos al mismo tiempo estar subiendo y bajando por la misma escalera? Reflexiona un momento en las respuestas a estas preguntas y podrás constatar que esos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo, por ello son mutuamente excluyentes.

Al arrojar una moneda al aire esperamos que caiga águila o que caiga sol, pero no pueden caer al mismo tiempo las dos caras. En esta lección estudiarás la probabilidad de eventos que son *mutuamente excluyentes*.

IDENTIFICA

Una persona desea invertir su dinero, para lo cual en el banco le ofrecen dos diferentes instrumentos de inversión. Uno de ellos da un buen rendimiento, pero representa más riesgo que el otro.

El inversionista, después de pensarlo bien, decide repartir su dinero entre las dos opciones, pero para su mala suerte, el asesor financiero le dice que hay un mínimo de capital para poder invertir, y si reparte su dinero no podrá invertir en ninguno de los dos instrumentos financieros.

Explora en internet

Visita la página que se indica para conocer más acerca de la probabilidad de Ocurrencia mediante el uso de diferentes ejemplos. http://misecundaria.com/Main/ProbabilidadDeOcurrencia
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

1. ¿Qué tipo de eventos se le están presentando al inversionista?
   a) La opción 1 es rentable pero muy riesgosa.
   b) La opción 2 casi no presenta riesgo pero la ganancia es poca.
   c) No le permiten partir en dos su capital, así que si desea invertir deberá elegir forzosamente una de las dos opciones, pero no ambas al mismo tiempo.
2. ¿Qué nombre recibe este tipo de eventos?

CONSTRUYE

Tomando como referencia el ejemplo anterior, identifica una situación de vida en la cual se presente la concurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.

1. Compara tu propuesta con la de tus compañeros.
2. Analicen si las propuestas efectivamente contemplan dos eventos.
3. Determinen si los dos eventos realmente se excluyen mutuamente o hay posibilidad de que ocurran los dos al mismo tiempo.

DECIDE

Con ayuda de su profesor, elijan en el grupo dos propuestas que cumplan el requisito de presentar dos eventos mutuamente excluyentes. Responde en tu cuaderno a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se denomina a cada uno de los eventos? En el ejemplo anterior fueron "probabilidad de alto riesgo con alto rendimiento" y "probabilidad de bajo riesgo con bajo rendimiento".
2. ¿Por qué se puede afirmar que son eventos excluyentes? Justifica tu respuesta.
3. ¿Hay alguna situación posible en la cual los eventos dejaran de ser excluyentes?
4. ¿Cómo afectaría esto al cálculo de probabilidad?

COMUNICA

Con ayuda de tu profesor comunica tus ideas al grupo, escuchando con respeto y comparando las respuestas de los otros compañeros con las tuyas.

IDENTIFICA

En un juego de feria un hombre tiene en una caja tres bolas azules, cuatro negras y seis amarillas.

1. Si se obtiene un premio al sacar una bola amarilla, ¿qué probabilidad se tiene de ganar?
2. Y si el premio se obtiene sacando bola azul, ¿cuál es ahora la probabilidad de ganar?
3. ¿Qué le conviene a quien dirige el juego?
4. ¿Qué le conviene a la persona que juega?

Ten en cuenta

Al extraer una bola, no puede ser al mismo tiempo azul y negra; es azul o es negra, por lo tanto, son eventos mutuamente excluyentes.

CONSTRUYE

De manera individual, responde a las preguntas.

1. Si hay tres colores de bolas y sólo se puede elegir uno, ¿cuál es la probabilidad de éxito para cada uno de ellos? Azul _____; negro _____; amarillo _____
2. Ahora el hombre ofrece premio a quien saque una bola azul o una bola negra, ¿cuál sería ahora la probabilidad de obtener un premio?

3. Calcula la probabilidad de ganar el juego:

   P (ganar) = _____ + _____ = _____

4. ¿Mejoró o empeoró la probabilidad de ganar?

Ten en cuenta

Para obtener la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes es necesario sumar ambas probabilidades:
Probabilidad (azul o negra) = Probabilidad (azul) + Probabilidad (negra)

DECIDE

Reúnete con un compañero y analicen la siguiente situación.

En otro juego de la feria se manejan cartas de dos colores, blanco y negro, numeradas del 1 al 5. Para ganar un premio le dan al jugador dos opciones a elegir.

Opción 1: sacar una carta blanca del 1 al 3 o una negra con número par.
Opción 2: sacar una carta blanca mayor que 4 o una negra menor que 3.
¿Cuál de las dos le conviene más? ¿Por qué razón?

1. Sin hacer ningún tipo de análisis decidan cuál opción consideran que es más conveniente para el jugador.
2. Hagan el cálculo de probabilidades y comparen su respuesta con la que dieron en el punto anterior.

Algo esencial

Si llamamos a la bola azul evento A y a la bola negra evento B, podemos generalizar la situación de la siguiente manera:

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$

Ésta es la *regla de la suma* para el cálculo de probabilidades de eventos mutuamente excluyentes. Si tenemos más eventos también se incluyen:

$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$

COMUNICA

Comparte tu respuesta con otros com-pañeros; si obtuvieron resultados diferentes revisen qué procedimiento siguieron y determinen cuál es el correcto con ayuda de su profesor.

¿Consideran de utilidad saber calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes? Registren sus conclusiones.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un hombre lanza un dado e indica que pierde el que obtenga número par o el 1. ¿Qué probabilidad hay de perder?
2. En una rueda de feria numerada del 1 al 8, los números pares se escribieron sobre un fondo verde y los impares sobre un fondo azul. ¿Qué probabilidad hay de conseguir el color azul o el número 2?
3. En una caja se colocan 8 canicas verdes, 12 rojas y 16 blancas. ¿Qué probabilidad hay de sacar una blanca o una verde? ¿Qué probabilidad hay de sacar una roja o una blanca?

Profundizando

Cuando se lanza un dado, por ejemplo, se puede calcular la probabilidad de obtener un número impar, pero la probabilidad de obtener número par será el evento complementario.

Si se calcula la probabilidad de obtener un número menor que dos, el evento complementario será la probabilidad de obtener del número 3 en adelante.

De esta forma, dos eventos son complementarios cuando al reunirlos se obtiene el espacio muestral.

En el caso del dado, el espacio muestral son los seis números que se pueden obtener al lanzarlo. Para una moneda el espacio muestral son los eventos águila-sol. Si un evento es la probabilidad de águila, el evento complementario será la probabilidad de sol.

1. Calcula la probabilidad de águila.
2. Calcula la probabilidad de sol.
3. Calcula la probabilidad de águila o sol.
4. ¿Qué se puede concluir?

Resumiendo

La *regla de la suma* se aplica cuando se quiere determinar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes o complementarios.

La regla de la suma especifica:

$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Los eventos son *mutuamente excluyentes* cuando no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo.

Los eventos son *complementarios* cuando completan el espacio muestral, su probabilidad es la unidad.

INFORMATIVO MATEMÁTICO

Datos

En notas periodísticas se presentan estadísticas económicas y sociales, así como encuestas de opinión a nivel nacional, datos médicos de estudios epidemiológicos y de pruebas clínicas, datos comerciales y financieros, etc. Muchos ciudadanos deben tratar con datos de mayor detalle dentro de sus trabajos. Por ejemplo, los ingenieros se ocupan de datos sobre el rendimiento, la calidad y la confiabilidad de productos. Las ciencias de la salud tratan con datos sobre el costo y la efectividad así como con resultados de investigaciones médicas.

Como sugieren estos ejemplos, los datos no son simples números sino números en contexto. Cualquier número en ausencia de un contexto no transmite información alguna; es decir, los datos participan a nuestros conocimientos de su contexto para que podamos ejercer la comprensión y la interpretación, en vez de limitarnos a efectuar operaciones aritméticas.

Historia

¿Cuándo se inventó la *x*?

En las antiguas civilizaciones se escribían las expresiones algebraicas utilizando ocasionalmente abreviaturas; sin embargo, en la Edad Media los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita *x*.

Durante el siglo XVI un avance importante en el álgebra fue la introducción de símbolos para las incógnitas y para las operaciones algebraicas. Debido a este avance, el *Libro III de la Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes, se parece bastante a un texto moderno de álgebra.

Caso curioso

Tres cuartas partes de hombre

Al encargado de una tienda le preguntaron:

— ¿Cuántos empleados son?

—No somos muchos —contestó—: tres cuartas partes de los que somos más tres cuartos de hombre.

¿Sabes cuántos son?

Evaluación tipo PISA

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

El cuadrado de los números

2.1 La suma de dos números es 8 y la suma de sus cuadrados es 34.

Nivel 1) ¿Cuáles son los números?

Nivel 2) Si la resta del cuadrado de dos números es 0 y ambos números siguen sumando 8, ¿cuáles son esos números?

Nivel 3) Si dos números son iguales y sus cuadrados también lo son y la suma de esos cuadrados es igual a 72, ¿cuáles son esos números?

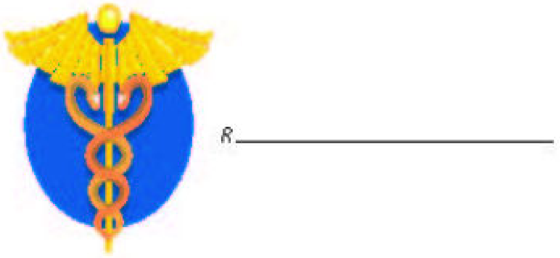
Transformaciones geométricas

2.2 Las transformaciones geométricas son parte del diseño y arte existente, identifícalas en el siguiente diseño.

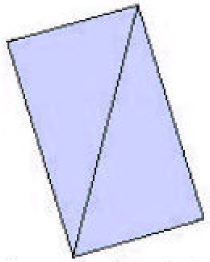
Nivel 1) En la figura mostrada traza el eje de simetría.

Nivel 2) Rota la figura 90° en el sentido de las manecillas del reloj.

Nivel 3) Dibuja la figura simétrica al eje R.



Los elementos del rectángulo



2.3 La siguiente figura representa un rectángulo.

Nivel 1) Determina el valor de cada lado, si la diagonal mide 50 cm.

Nivel 2) Si la diagonal mide 10.2 cm, ¿cuál es el valor de a?

Nivel 3) Determina el valor de los ángulos interiores del triángulo.

El semáforo

2.4 En el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México a los viajantes se les revisa el equipaje de la siguiente manera: en una sala hay un semáforo con un botón, cada pasajero debe apretar dicho botón, sólo si sale rojo debe ser revisado. El semáforo está graduado para que se active el color verde o rojo de manera igual de probable. Juan está formado para pasar por el semáforo.

Nivel 1) Si la persona que acaba de pasar obtuvo luz verde, ¿cuál es la probabilidad de que al oprimir el botón Juan obtenga color verde?

Nivel 2) Han pasado 2 personas y ambas obtuvieron color verde. ¿Cuál es la probabilidad de que al oprimir el botón Juan obtenga color verde?

Nivel 3) Han pasado 10 personas y todas han obtenido color verde. ¿Cuál es la probabilidad de que al oprimir el botón Juan obtenga color verde?

La simetría

2.5 Al diseñar la fachada de un museo, el arquitecto González reflejó la imagen de un triángulo dos veces seguidas, con respecto a dos ejes de simetría a 90°.

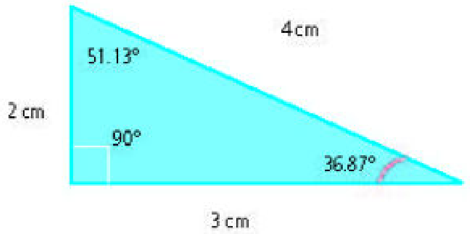
Nivel 1) Determina a qué tipo de simetría equivale esta reflexión.

Nivel 2) ¿Cuántas reflexiones se produjeron en el diseño del arquitecto González?

Nivel 3) Si los dos ejes de simetría son paralelos, ¿qué amplitud tiene la traslación respecto a la distancia entre los ejes?

Los triángulos rectángulos

2.6 En un triángulo rectángulo se puede establecer una relación constante entre sus lados. Si se tiene un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 3 cm y 4 cm.



Nivel 1) ¿Cómo se identifican los catetos?

Nivel 2) ¿Cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto?

Nivel 3) ¿Cómo se les llama, por su medida y por cuánto suman, a los otros ángulos del triángulo rectángulo que no son rectos?

El poste

2.7 Un hombre lleva en la mano la punta de una cuerda que mide 6.26 m, cuyo otro extremo se encuentra atado en lo alto de un poste. Cuando ya caminó una distancia de 3 m la cuerda queda completamente extendida, formando un triángulo rectángulo con el piso y el poste.

Nivel 1) Determina la altura del poste.

Nivel 2) ¿Cuánto mide el cateto que queda sobre el piso?

Nivel 3) Si el hombre caminara una distancia de 5 m, ¿cuál sería la longitud de la cuerda que está atada a la punta del poste?

Las caricaturas

2.8 La probabilidad de que, en una familia de dos integrantes, un hombre vea caricaturas en la televisión es 0.2 y la probabilidad de que una mujer vea también caricaturas es 0.3. La probabilidad de que un hombre vea la televisión cuando lo hace una mujer es 0.5.

Nivel 1) ¿Es más probable que un hombre vea caricaturas o que una mujer lo haga?

Nivel 2) Encuentra la probabilidad de que una mujer vea caricaturas cuando un hombre ve caricaturas.

Nivel 3) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona en una casa vea caricaturas?

Autoevaluación

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

REALIZA

1. Encuentra la solución de la ecuación $7x - 21x^2 = 0$
2. Traza al menos dos diferentes señales de tráfico con simetría axial y dos más con simetría central. Indicando en ellas el eje o centro de simetría.
3. Indica si las siguientes frases son ciertas o falsas, en el caso de lanzar una moneda al aire:
   a) No sacar ni Águila ni Sol, es un suceso.
   b) Sacar Águila y sacar Sol son sucesos equiprobables.

Argumenta tu respuesta.

APLICA

1. El área de un terreno que tiene forma rectangular es de 450 m^2. Si mide el doble de largo que de ancho, ¿cuánto medirá su ancho?
2. Determina el largo de un rectángulo de 3 cm de ancho y 22 cm de diagonal.
3. Calcula mentalmente la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire obtengas:
   a) 2 Águilas.
   b) 2 Soles.
   c) 1 Águila y 1 Sol.

REFLEXIONA

1. La fórmula para calcular la distancia recorrida por un objeto en movimiento (d), que parte con velocidad inicial (vi), y que lleva una aceleración (a) durante un tiempo (t) es:
$$d = vi \cdot t + a \cdot t^2$$
¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 1 000 m una motocicleta que circula a 25 m/s con una aceleración de 1.5 m/s?
2. Calcula el lado de un cuadrado si su diagonal mide 18 cm.
3. Se lanzan dos dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los dos resultados de los dos dados sea 8?

Glosario

CATETO. Cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo que conforman el ángulo recto. Lados adyacentes al ángulo recto.

ECUACIÓN CUADRÁTICA. Ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es 2.

FACTORIZACIÓN. Técnica que consiste en la descomposición de una expresión matemática en forma de producto.

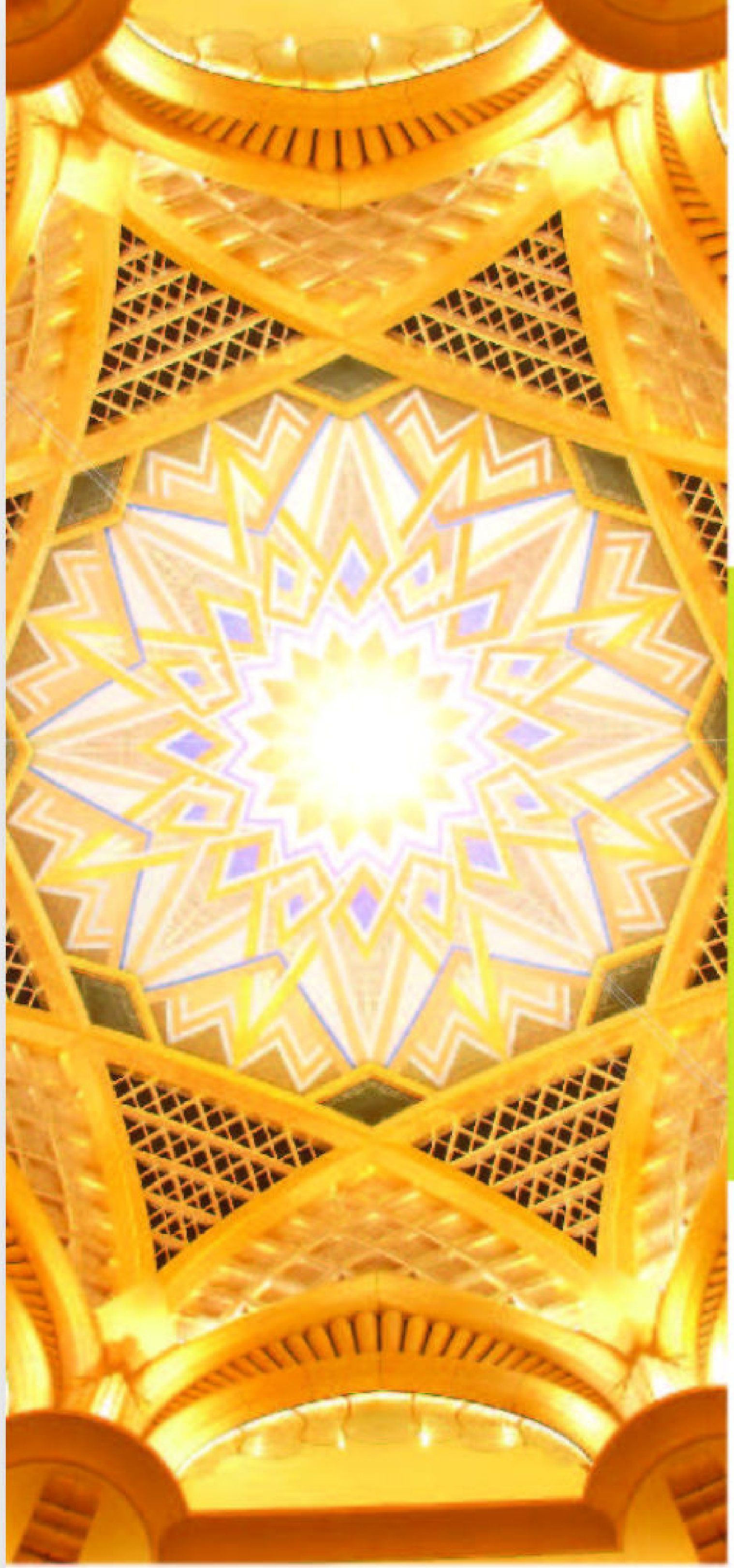
HIPOTENUSA. Lado más largo en un triángulo rectángulo.

ROTACIÓN. Movimiento circular en que hay un punto central que se mantiene fijo y todo lo demás se mueve en círculos alrededor de ese punto.

SIMETRÍA. Correspondencia entre los puntos del plano o del espacio situados a uno y otro lado del centro, eje o plano de simetría y a la misma distancia de él.

TEOREMA DE PITÁGORAS. En un triángulo rectángulo el cuadrado del lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (los catetos). Se establece en esta fórmula: $a^2 + b^2 = c^2$

TRASLACIÓN DE FIGURAS. Movimientos directos sin cambios de orientación, forma o tamaño.



Bloque 3

La necesidad de entender y controlar el mundo cambiante en que vivimos es de suma importancia. Para actuar de manera eficaz debemos ser sensibles a los patrones de cambio, incluyendo el descubrimiento de patrones ocultos en los eventos que a simple vista parezcan no tenerlos. Para ello es necesario:

- Representar los cambios en una forma comprensible.
- Entender los tipos fundamentales de cambio.
- Identificar tipos particulares de cambio cuando ocurran.

El medio más eficaz para llevar a cabo estas tareas son las matemáticas. Con ellas construimos universos y modelos, y los descomponemos para investigar la forma en que operan, resaltamos sus rasgos estructurales importantes y percibimos y desarrollamos principios generales.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

Resuelvas problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.

Soluciones problemas de congruencia y semejanza que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Ideas clave

Comunica tus ideas y **escucha** con respeto para obtener, seleccionar y registrar información mediante la realización de problemas, comparando los resultados obtenidos y fomentando el trabajo en grupo.

Argumenta tus participaciones por medio de la realización de modelos, tablas, gráficas o expresiones, tomando decisiones adecuadas acerca de ellas y adquiriendo una actitud crítica.

Utiliza la tecnología para plantear y resolver problemas valorando críticamente su utilidad y la de otros medios, participando y ayudando para afrontar las situaciones que requieran su empleo.

Dosificación Bloque 3

Semana	Tema	Subtema	Aprendizajes esperados
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico			
16	Patrones y ecuaciones	3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	1. Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
Eje: Forma, espacio y medida			
17	Figuras y cuerpos	3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	2. Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.
18		3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el Teorema de Tales.	
19		3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	
Eje: Manejo de la información			
20	Proporcionalidad y funciones	3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	
21		3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	
22	Nociones de probabilidad	3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	
23	Evaluación tipo PISA		
23	Autoevaluación		

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN
Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Repasa tus conocimientos

Contesta en tu cuaderno.

1. La suma de dos números es 12 y la suma de sus cuadrados es 80. ¿Cuáles son los números?
2. Una propiedad importante de los triángulos equiláteros es que:
   a) Uno de sus ángulos interiores siempre es agudo.
   b) Todos son semejantes.
   c) Tienen al menos dos lados iguales.
   d) Todos son congruentes.
3. Un poste de luz proyecta a cierta hora del día una sombra de 15.5 m. Si a la misma hora un buzón de correos de 80 cm proyecta una sombra de 1.20 m, ¿cuál es la altura del poste?
4. Para construir una figura homotética se requiere:
   a) Que sus lados midan exactamente lo mismo.
   b) Un par de escuadras.
   c) Que no tengan más de cuatro lados.
   d) Un centro de homotecia.
5. Elabora una gráfica con la siguiente información:

Tiempo (s)	2	3	4	5
Posición (m)	0	4	10	18

Tabla 3.1

6. Juan pasa de la estación 1 a la estación 3 en 10 minutos. Transcurridos los 10 minutos, Luis llega a la estación 4 y se desplaza a la estación 5 en 3 minutos. Si se hace una sola gráfica que muestre el desplazamiento de los amigos, colocando el tiempo en el eje horizontal y las estaciones en el vertical, ¿qué tipo de función se obtiene? Argumenta tu respuesta.
7. ¿Cómo es la gráfica que se genera de un fenómeno que se comporta primero linealmente y después en forma cuadrática?
8. Luis echa un volado con Pedro y al mismo tiempo arroja un dado. ¿Qué probabilidad tiene de obtener un águila y un dos?

Comenta tus respuestas con el grupo y registra tus conclusiones en el cuaderno; de esta manera, al finalizar el estudio de este tema podrás valorar tus avances.

Patrones y ecuaciones

3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

La siguiente secuencia ha sido elaborada con el propósito de que analices las posibilidades de solución de ecuaciones y abordes el estudio de la naturaleza de las raíces de las ecuaciones de segundo grado, por medio de la puesta en funcionamiento de conocimientos pertenecientes a diferentes aspectos: algebraico, gráfico y numérico. También te permite determinar la fórmula para la resolución de estas ecuaciones en diferentes situaciones.

IDENTIFICA

En la siguiente tabla se muestran polígonos convexos en los que se trazaron diagonales que parten de un vértice *A* cualquiera.

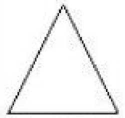
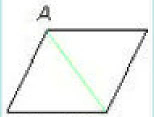
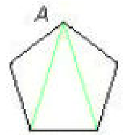
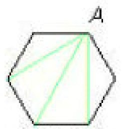
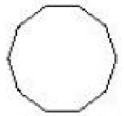
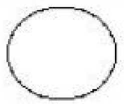
Polígonos	 Triángulo	 Cuadrilátero	 Pentágono	 Hexágono	 Decágono	 Polígono regular de 24 lados
Lados	3	4	5	6	10	24
Diagonales	0	1	2	3		

Tabla 3.2

Verifica lo siguiente respecto a las diagonales:

1. Parten del vértice *A* y se unen a otros vértices menos con él mismo y el contiguo. Por ejemplo, en el cuadrilátero:
   Número de lados menos 3 = 4 – 3 = 1 diagonal
   En el pentágono: 5 – 3 = 2 diagonales
   En el hexágono: 6 – 3 = 3 diagonales
2. Las diagonales se cuentan dos veces y se pueden expresar así:
   Número de diagonales = número de lados (número de lados – 3)

CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se te solicita a continuación:

1. ¿Cómo puedes conocer el número de diagonales para el decágono o de cualquier polígono convexo?
2. Sustituye los miembros de la fórmula que hallaste en la respuesta a la pregunta 1, por la expresión algebraica correspondiente. Con ella puedes conocer el número de diagonales en cualquier polígono convexo.
3. Si se requiere determinar el número de lados que tiene un polígono conociendo el número de diagonales, ¿cómo puedes contestar esta situación usando la fórmula?

Ten en cuenta

Buscar una fórmula es una manera de contestar una pregunta sobre el número de diagonales. Considera lo siguiente:

a) Si llamamos *x* al número de lados.
b) Si llamamos *D* al número de diagonales.

- La fórmula se escribiría:

$$\text{Número de diagonales} = \frac{\text{Número de diagonales repetidas dos veces}}{2}$$

Se divide entre 2, ya que sólo nos interesa el conteo de una para cada polígono.

COMUNICA

Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu profesor y escribe las conclusiones que obtuvieron entre todos.

DECIDE

Responde en tu cuaderno.

1. Si una figura tiene 252 diagonales, ¿a qué polígono corresponde?
   a) ¿Qué expresión obtienes al sustituir los valores?
   b) Escribe el procedimiento completo para encontrar la incógnita.
   Tu respuesta es una ecuación cuadrática. Al resolver la ecuación encuentras el valor del número de lados del polígono.

COMUNICA

Expón ante tus compañeros el método que utilizaste para resolver la ecuación cuadrática. Discutan las diferencias que encuentren en sus respuestas. Escribe en tu cuaderno la conclusión que obtuvieron.

Ten en cuenta

Para resolver esta ecuación hay que extraer el factor común x:

$$x(ax+b)=0$$

El primer miembro es un producto de dos factores; para que valga 0, al menos uno de los factores tiene que valer 0.

- Si $x = 0$, la ecuación se verifica:

$$0(a(0)+b)=0$$

- Si $ax + b = 0$, despejamos x y obtenemos la otra solución:

$$x=\frac{-b}{a}$$

IDENTIFICA

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que tiene una sola incógnita con exponente 2:

$$ax^2 = 0\ ;\ ax^2 + c = 0\ ;\ ax^2 + bx = 0 \text{ y } ax^2 + bx + c = 0$$

por lo general se les denomina ecuaciones cuadráticas.

Término cuadrático — Término independiente

$$\boxed{ax^2} + \boxed{bx} + \boxed{c} = 0$$

Término lineal

CONSTRUYE

Hagan equipos de tres, reflexionen sobre la información anterior y respondan lo siguiente:

1. ¿Existe algún número cuyo cuadrado multiplicado por 6, menos el número multiplicado por 36, es igual a 0?
   a) Expresa esta situación utilizando el lenguaje algebraico siguiente:
      - Un número:
      - Cuadrado del número:
      - Multiplicado por 6:
      - Menos el número multiplicado por 36:
      - Es igual a 0:
   b) Esta ecuación tiene la forma $ax^2 + bx = 0$; escribe la ecuación:

DECIDE

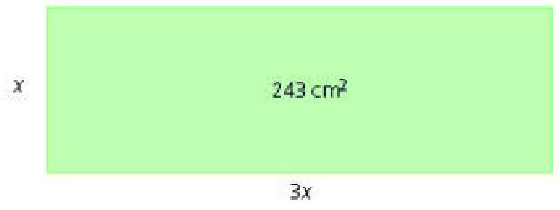
Analiza la información anterior y, utilizando el método estudiado, resuelve la ecuación del inciso b de la sección Construye.

COMUNICA

Compara tu respuesta con la de tus compañeros. Comenten si existe otra manera de solucionar la ecuación. Escribe en tu cuaderno la conclusión que obtuvieron.

IDENTIFICA

El maestro dibujó en el pizarrón un rectángulo con unos números, como se muestra en la figura, y le pidió a sus alumnos investigar cuáles son las dimensiones del rectángulo.



Ten en cuenta

Las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ se resuelven despejando la incógnita y si tienen solución, está constituida por dos números opuestos.

CONSTRUYE

Analiza la información estudiada anteriormente y resuelve lo que se solicita.

a) El área del rectángulo es igual a largo por ancho. Exprésalo algebraicamente.
b) El área tiene que ser igual a 243 cm^2; expresa la ecuación.

DECIDE

Analiza la información de Ten en cuenta y resuelve, con este método, la ecuación del inciso b de la sección Construye.

Ten en cuenta

Una expresión de la forma $ax^2 + c = 0$ es una ecuación cuadrática con el término lineal igual a 0. Para resolver esta ecuación despejamos x.

$$ax^2+c=0$$
$$ax^2=c$$
$$x^2=\frac{c}{a}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

COMUNICA

Compara tu respuesta con la de tus compañeros. Comenta cómo encontraste la ecuación cuadrática que resuelve el problema del inciso b. Escribe en tu cuaderno la conclusión que obtuvieron.

IDENTIFICA

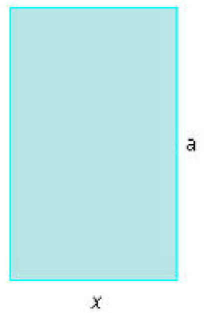
En un jardín de niños se va a construir un espacio para juegos. Debe ser rectangular y medir 72 m de perímetro.

a) ¿Cómo varía el área del espacio para juegos al variar la longitud de uno de sus lados? Traza unos rectángulos para argumentar tu respuesta.
b) ¿Qué medidas deberá tener el espacio de juegos para que el área sea la máxima?

CONSTRUYE

Responde en tu cuaderno.

1 Considera la siguiente información y junto con otro compañero descríbela. Argumenta tu respuesta ante el grupo. Escribe en tu cuaderno la conclusión a la que llegaron.
La ecuación para el perímetro es:
$2a + 2x = 72 \longrightarrow a + x = 36 \longrightarrow = 36 - x$
La ecuación para el área en función de x es:
$A = x(36 - x)$
$A = 36x - x^2$



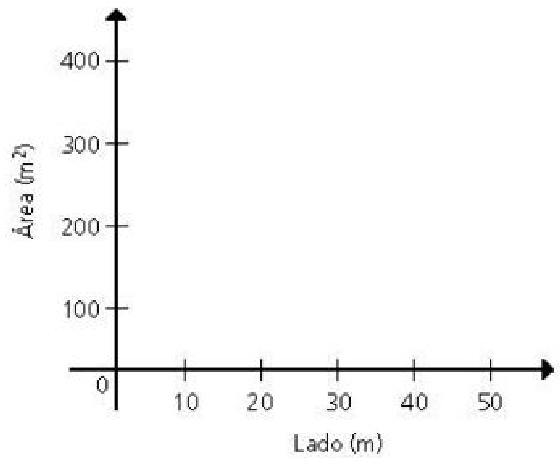
2 Completa la siguiente tabla.

Lado x	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Área (A)	99							288		

Tabla 3.3

¿Qué sucede con los datos del área al aumentar la medida del lado?

3 Grafica los datos de la tabla, verifica si tus argumentos son comprobados y coméntalos con el grupo.



DECIDE

Analiza e interpreta la información de la gráfica y responde lo siguiente:

1 ¿Cuál es el punto más alto?

2 Comenta con tus compañeros la relación que tiene el punto más alto de la gráfica con las dimensiones del espacio para juegos.

Algo esencial
La función $A = 36x - x^2$ es cuadrática y su gráfica es una *parábola*.

IDENTIFICA

Dados dos números positivos, A y B, busca un rectángulo de perímetro $2A$ cm y área B cm^2 para los siguientes valores de A y B:

a) $A = 15$ y $B = 36$
b) $A = 41$ y $B = 402$
c) $A = 39$ y $B = 402$

Formen un equipo de tres compañeros y exploren solamente una situación tratando de que al menos tres equipos trabajen con los mismos números. Representa con rectángulos las posibles soluciones.

CONSTRUYE

Analiza la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se pide a continuación:

1 Escriban el procedimiento utilizado en la resolución del problema anterior.

2 Comparen su procedimiento con el de los demás equipos.

3 Se tienen varias alternativas para la resolución, de tal manera que los valores de A y B han sido seleccionados para que el problema:

a) Tenga solución entera.
b) Tenga solución no entera.
c) No tenga solución.

4 Identifica cada una de ellas y explica este hecho.

DECIDE

Reflexiona las actividades anteriores y responde lo siguiente:

1 ¿Qué incisos se pueden resolver utilizando un procedimiento de tanteo?

2 ¿Qué ejercicio requiere la expresión algebraica para su resolución?

3 ¿Cuál ejercicio se puede resolver a través de una representación geométrica?

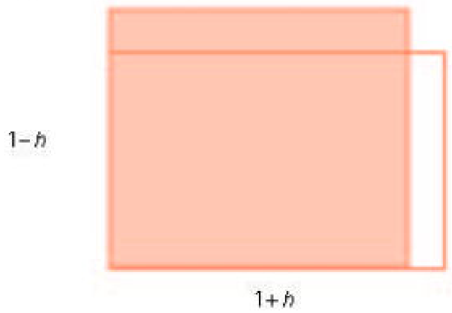
COMUNICA

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Arguméntalas y resuelvan las diferencias que encuentren. Pidan ayuda a su profesor si es necesario.

IDENTIFICA

Un estudiante presentó al grupo el siguiente argumento sobre el problema anterior, en el que se preguntaba si es posible encontrar un rectángulo de igual perímetro que el de un cuadrado y cuya área sea mayor.

- Dibujó un cuadrado cuyo lado es 1, el cual se deforma en un rectángulo de igual perímetro cuyos lados son $1 + h$ y $1 - h$.
- Comparó las áreas.
- Estableció que cuando se pasa al rectángulo, su área decrece.



Expón ante el grupo tu opinión al respecto.

CONSTRUYE

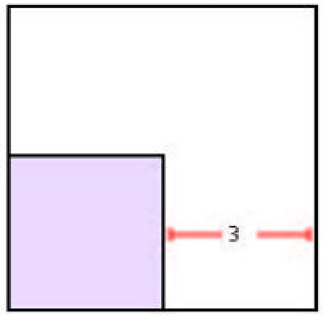
De acuerdo con la información anterior responde en tu cuaderno lo que se pide a continuación:

1. ¿Cuál es la expresión algebraica del área del cuadrado y cómo se transforma en el área del rectángulo?
2. ¿Existe algún rectángulo que cumpla con esta condición? Explica.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Calcula las dimensiones de un rectángulo de 21 m de perímetro y 26 m^2 de área.
2. El área del cuadrado grande es el doble de la del pequeño. Determina sus dimensiones:



3. En un comercio se pueden encargar espejos enmarcados a la medida. El precio es de 600 pesos el m^2 de espejo y 120 pesos por metro lineal de marco. Determina el tamaño de un espejo cuadrado que valga en total 270 pesos.

COMUNICA

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Explica qué método empleaste para encontrar la respuesta de cada problema. Anota en tu cuaderno la conclusión que se obtuvo en esta actividad.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Admitimos, sin demostración, que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se calculan aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo de la raíz proporciona las dos soluciones de la ecuación (cuando existen).

1. Resolvamos la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$, donde $a = 2$, $b = -7$ y $c = 3$.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \qquad x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{(7) \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \qquad x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Entonces, esta ecuación tiene dos soluciones, como puedes comprobar por sustitución directa:

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$

Utilizando este procedimiento obtén la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$
b) $x^2 - 8x + 7 = 0$
c) $2x^2 + x - 3 = 0$
d) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

Explica con tus propias palabras el procedimiento y cómo comprobarías que las raíces que obtuviste como solución en cada una son correctas.

Caso a considerar

Resolvemos la ecuación $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ y para ello multiplicamos por -1 para que el término cuadrático sea positivo:

$$-2x^2 + 3x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4}$$

2 ¿A qué ecuación corresponden las soluciones: $x = -2$ y $x = 3$?
a) $x^2 - x - 6 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 + x - 6 = 0$
d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

3 Como sugerencia para tener otra perspectiva de las ecuaciones cuadráticas y saber más sobre ellas, grafica las cuatro ecuaciones anteriores en un mismo plano cartesiano y observa lo que sucede con la raíz.

4 En una ecuación cuadrática, ¿qué coeficiente nunca puede ser 0? Argumenta tu respuesta.

5 Dos ecuaciones cuadráticas pueden tener la misma solución, si es afirmativa la respuesta escribe un ejemplo.

Profundizando

Sin resolver una ecuación cuadrática podemos saber el tipo y número de soluciones que tendrá. Para ello, estudiaremos el radicando de la fórmula general.

Fórmula general	**Radicando**
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$b^2 - 4ac$

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante de la ecuación* y de su signo depende el número de soluciones.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces tiene dos soluciones debido al doble signo de la raíz.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces tiene una solución, porque la raíz es 0.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces no tiene ninguna solución, porque un número negativo no tiene raíz cuadrada.

1 Utiliza esta información e indica el tipo y cantidad de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

2 Determina para qué valores del término independiente c tiene o no solución la ecuación $2x^2 + 3x + c = 0$

3 ¿Para qué valores del coeficiente k tienen dos, una o ninguna soluciones en cada una de las siguientes ecuaciones?
a) $2x^2 - 3x + k = 0$
b) $kx^2 - 6x + 1 = 0$
c) $2x^2 - kx - 1 = 0$

4 Resuelve en tu cuaderno las ecuaciones, usa la fórmula general y anota qué ventajas encuentras al emplear el discriminante de las ecuaciones.
a) $2x^2 - x - 10 = 0$
b) $5x^2 - 10x - 5 = 0$
c) $13y^2 - 117x + 104 = 0$
d) $30x^2 - 18x - 12 = 0$
e) $(2t - 1)(t - 3) = t - 3$
f) $9x^2 - 6x = 2$
g) $3x^2 = x^2 - 12x - x$
h) $x(x + 3) = 2(x + 1)$

Resumiendo

Toda ecuación de segundo grado se caracteriza por tener una sola incógnita con exponente 2; por ello se les conoce también como *ecuaciones cuadráticas*.

Por lo general, presentan los tres términos (cuadrático, lineal o independiente); sin embargo, pueden carecer de término lineal y/o de término independiente.

La forma general de las ecuaciones cuadráticas es $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ y a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Término cuadrático — Término lineal — Término independiente

Estos valores a, b y c, se usan en la aplicación de la *fórmula general* que es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El *discriminante de la ecuación*, que es la operación que se encuentra dentro de la raíz ($b^2 - 4ac$), determina la cantidad de soluciones de la ecuación, esto es de acuerdo con su signo. Por ejemplo:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos soluciones debido al doble signo de la raíz.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene una solución porque la raíz es 0.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene soluciones porque un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Figuras y cuerpos

3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

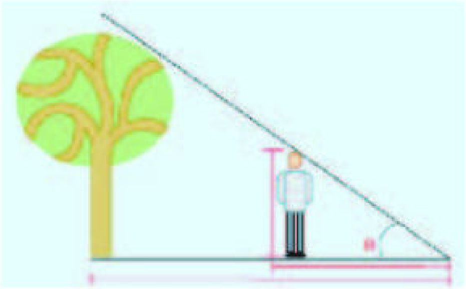
La semejanza nos ayuda a medir cosas cuyo tamaño difícilmente podríamos averiguar por otro método. Por ejemplo, un árbol es muy sencillo de medir con el siguiente procedimiento:

1 Sujeta un popote al nivel de suelo para que funcione como visor.

2 Mira hacia la copa del árbol y aléjate de él hasta que veas a través del popote exactamente el final de la copa.

3 Señala el vértice en el suelo y mide el ángulo de inclinación del popote.

4 Ahora pide a un compañero que se coloque en la línea de visión (la misma con la que ves la copa del árbol), y se aleje o acerque hasta que la parte superior de su cabeza coincida con la copa del árbol (mirando por el popote, visor), como se muestra en la siguiente figura:



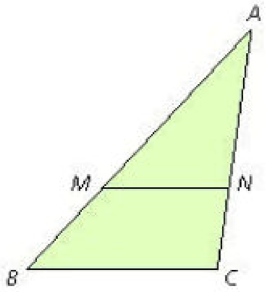
5. Cuentas con la medida del ángulo.
6. Mide la distancia del vértice al árbol; también mide la altura de tu compañero y la distancia de éste al vértice.

Para conocer la altura del árbol se aplican los conocimientos de semejanza que se estudiarán en esta lección.

IDENTIFICA

Los triángulos son polígonos, y dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y los lados proporcionales. Pero no es necesario comprobar estos requisitos para afirmar que dos triángulos son o no semejantes; basta con que se cumpla alguna de las siguientes condiciones.

I. Toda recta paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo semejante al original.



Efectivamente, los ángulos son iguales:

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B = \sphericalangle M$ $\sphericalangle C = \sphericalangle N$

Los lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

1. Elabora una construcción geométrica para validar de otra manera este caso de semejanza, con la mayor precisión posible.

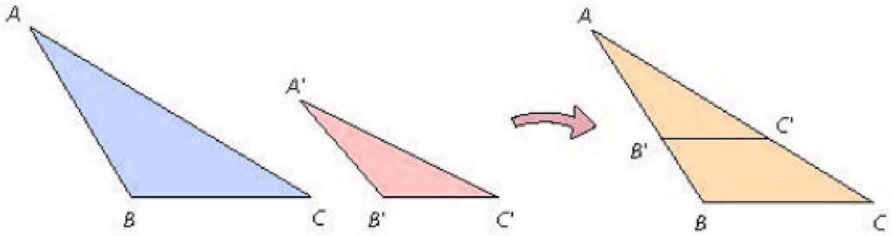
Condición matemática	Construcción geométrica
Dos triángulos con un lado paralelo	

Tabla 3.4

II. Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, son semejantes. Al tener dos ángulos iguales, el tercer ángulo también lo será.

$\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen, por tanto, sus ángulos iguales:

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$



Moviendo el triángulo menor podemos hacer coincidir el $\sphericalangle A$ con el $\sphericalangle A'$. Como $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, los lados BC y $B'C'$ quedan paralelos. Así, los triángulos son semejantes.

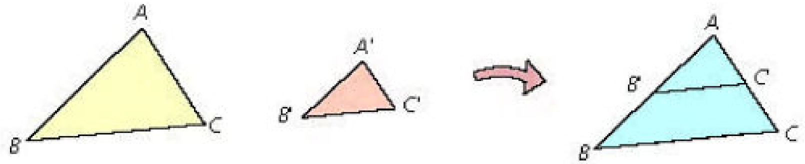
En particular, dos triángulos con los lados paralelos dos a dos son semejantes porque tienen sus ángulos iguales.

1. Elabora una construcción geométrica para este caso de semejanza con la mayor precisión posible.

Condición matemática	Construcción geométrica
Dos triángulos tienen dos ángulos iguales	

Tabla 3.5

III. Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, entonces son semejantes. Igual que en el caso anterior, se hace coincidir $\sphericalangle A$ con $\sphericalangle A'$:



Ahora se da la condición de proporcionalidad. Los triángulos son semejantes.

1. Elabora una construcción geométrica para este caso de semejanza con la mayor precisión posible.

Condición matemática	Construcción geométrica
Dos triángulos tienen un ángulo igual, los ángulos y lados que lo forman son proporcionales	

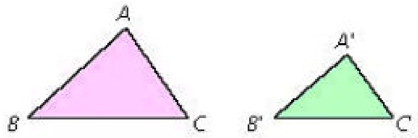
Tabla 3.6

IV. Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, son semejantes.

Los ángulos iguales son los opuestos a los lados proporcionales:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$



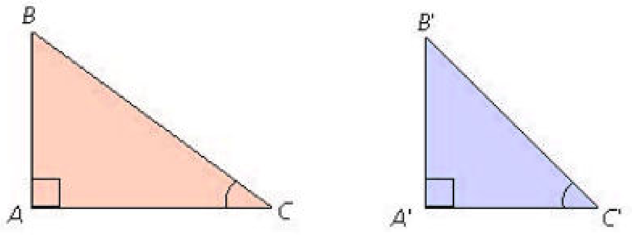
1. Elabora una construcción geométrica para este caso de semejanza con la mayor precisión posible.

Condición matemática	Construcción geométrica
Dos triángulos tienen los tres lados proporcionales	

Tabla 3.7

V. El caso de los triángulos rectángulos.

Dos triángulos son semejantes si uno de los ángulos agudos de uno es igual a un ángulo agudo del otro triángulo rectángulo.



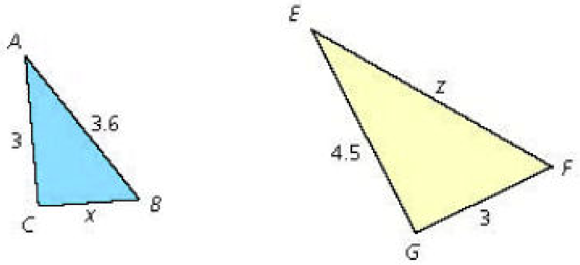
La razón es evidente: los ángulos rectos son iguales y al tener dos ángulos iguales, el tercero también lo será.

1. Elabora una construcción geométrica para este caso de semejanza con la mayor precisión posible.

Condición matemática	Construcción geométrica
Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual	

Tabla 3.8

VI. Las siguientes parejas de triángulos son semejantes. Hallar los datos indicados con letras. Observa que los ángulos iguales están enfrente de los lados homólogos:



Como

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} \longrightarrow \frac{3.6}{z} = \frac{3}{4.5} \qquad z = 5.4$$

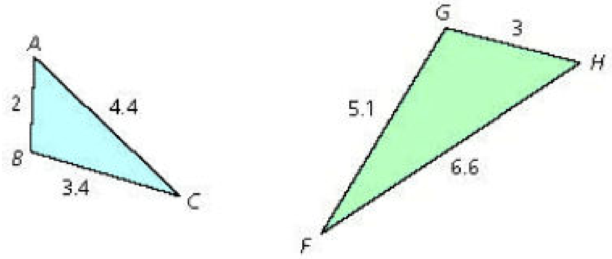
$$\longrightarrow \frac{3}{4.5} = \frac{x}{3} \qquad x = 2$$

1. Escribe en tu cuaderno el procedimiento que se debe utilizar para resolver el problema anterior.

CONSTRUYE

Responde lo que se solicita a continuación:

1. Decide si son o no semejantes los siguientes triángulos.



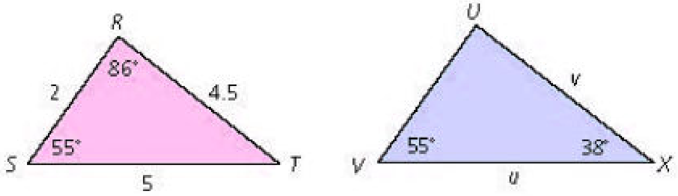
Como $\frac{2}{3} = \frac{3.4}{5.1} = \frac{4.4}{6.6}$, $\triangle ABC$ y $\triangle FGH$ son semejantes.

En consecuencia, se cumplirá que:

$\measuredangle A = \measuredangle H \qquad \measuredangle C = \measuredangle F \qquad \measuredangle B = \measuredangle G$

Escribe en tu cuaderno tus argumentos para decidir si son o no semejantes.

2. Decide si son semejantes los triángulos siguientes.



Como $\sphericalangle T = 39°$ y $\sphericalangle U = 87°$, $\triangle RST$ y $\triangle UVX$ no son semejantes, no podemos obtener ninguna consecuencia.

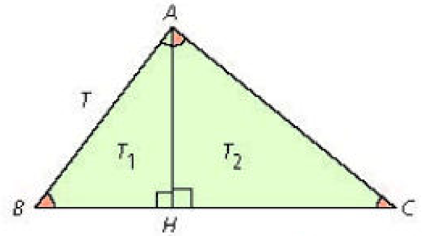
Justifica el procedimiento utilizado para determinar que no son semejantes.

COMUNICA

Comenten con sus compañeros y su profesor la utilidad de la semejanza de las figuras; planteen algunos ejemplos que hayan observado a su alrededor y escriban las conclusiones que obtuvieron entre todos.

IDENTIFICA

$\triangle ABC$ es rectángulo en A, y $\overline{AH}$ es la altura. Comprueba que los tres triángulos son semejantes dos a dos y escribe la proporcionalidad de los lados de T_1 y T_2 y T y T_2:



Los ángulos B y C son complementarios. Por tanto, $\triangle AHB$ y $\triangle AHC$ tienen los tres ángulos iguales. La proporcionalidad entre los lados se escribe así:

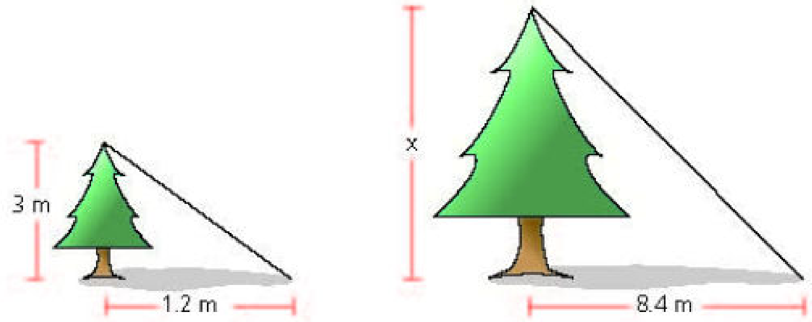
$$\begin{matrix} T_1 \longrightarrow \\ T_2 \longrightarrow \end{matrix} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}$$

También $\triangle ABC$ y $\triangle ABH$ son semejantes.

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}$$

1 Escribe, en tu cuaderno, tu propia regla para resolver el siguiente problema.

Ejemplo:

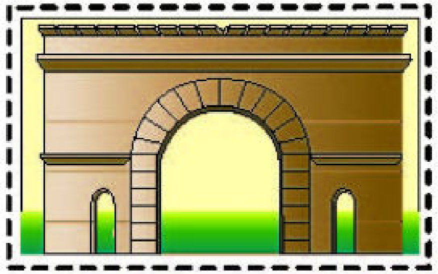


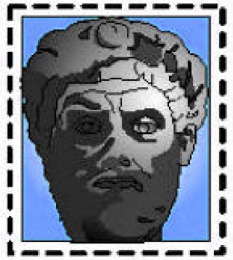
Las sombras de dos árboles miden, a la misma hora del día, 1.2 m y 8.4 m. El árbol pequeño tiene una altura de 3 m. ¿Cuál es la altura del árbol grande? Los triángulos son rectángulos y tienen un ángulo igual: el que forman los rayos de sol con el suelo.

$$\frac{x}{3} = \frac{8.4}{1.2} \qquad x = \frac{3 \cdot 8.4}{1.2} \qquad x = 21 \text{ m}$$

2 Aplica este método para calcular la altura del edificio de tu escuela; puedes tomar como datos conocidos tu estatura y la proyección de tu sombra y la del edificio en una hora determinada. Escribe en tu cuaderno esta experiencia como un problema por resolver.

Desde siempre, diseñadores, escultores, pintores y geómetras se han preguntado cuáles son las proporciones que hacen más armonioso un objeto. Por ejemplo, los rectángulos se encuentran en las fachadas de los edificios, en puertas y ventanas, en los cuadros de las pinturas, etcétera, incluso un rostro humano puede enmarcarse en un rectángulo.

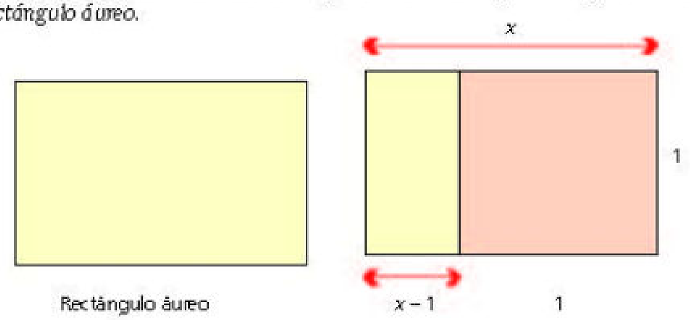




3 ¿Qué relación debe haber entre las dimensiones de un rectángulo para que resulte lo más atractivo posible a nuestra vista?

Naturalmente, los gustos son subjetivos. Sin embargo, ¿verdad que las formas muy estiradas o muy chatas no son tan bonitas? En ocasiones resultan demasiado simples.

Los geómetras griegos de la época clásica pensaban que el rectángulo mejor proporcionado es aquel que al separarle un cuadrado queda otro rectángulo semejante al inicial. Lo llamaron *rectángulo áureo*.



Rectángulo áureo

Si tomamos como unidad el lado menor y calculamos la medida del mayor, se tiene que cumplir la proporción:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Donde x sea un número positivo.

Al resolver la proporción obtenemos una ecuación no lineal.

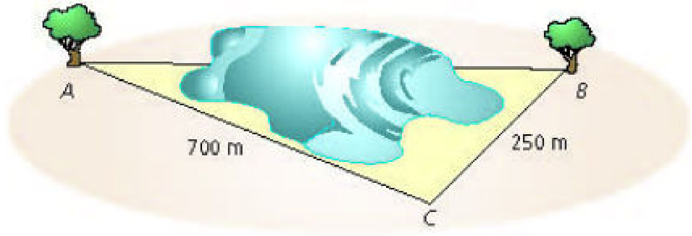
4 ¿Cuál es la ecuación que resulta? Escríbela.

La solución de esa ecuación es: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803...$

Φ es la llamada razón áurea, número de oro o número de Fidias, desde que éste la usó en la construcción del Partenón.

5. Investiga en qué objetos de tu entorno se utiliza el número de oro. Anótalos en tu cuaderno y justifica tu respuesta.

Un lago impide medir la distancia entre A y B de manera directa. ¿Cómo podemos calcularla?



Medimos las distancias desde el punto C hasta los puntos A y B. Asimismo, medimos el ángulo C.

Obtenemos los siguientes datos:

El $\overline{AC} = 700$ m   El $\overline{CB} = 250$ m   El $\sphericalangle C = 112°$

Dibujamos el triángulo a escala 1:10 000, es decir, semejante y 10 000 veces más pequeño, al cual también llamaremos $\triangle ABC$.

Los lados miden 700 m ÷ 10 000 = 0.07 m, que es equivalente a 7 cm y 250 m ÷ 10 000 = 0.025 m, que es equivalente a 2.5 cm. Medimos con precisión y obtenemos que $\overline{AB} = 9$ cm. La distancia real del $\overline{AB}$ mide 9 cm • 10 000 = 90 000 cm = 900 m.

¿Qué otras situaciones conoces donde medir cierta distancia entre dos puntos parezca imposible?

CONSTRUYE

1. Analiza el ejemplo anterior y explica con tus propias palabras el método utilizado para calcular distancias inaccesibles. Escríbelo en tu cuaderno.

COMUNICA

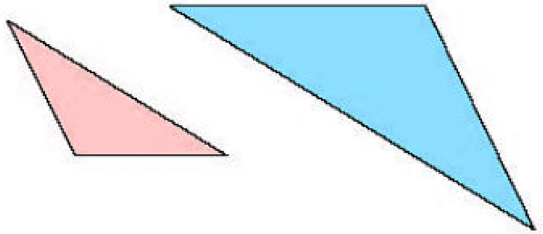
Comparte tu respuesta con otros compañeros y en sesión grupal analícenlas y determinen, con ayuda de su profesor, cuál es el procedimiento más adecuado para resolver este tipo de problemas. Registren sus conclusiones.

Competencia matemática en acción

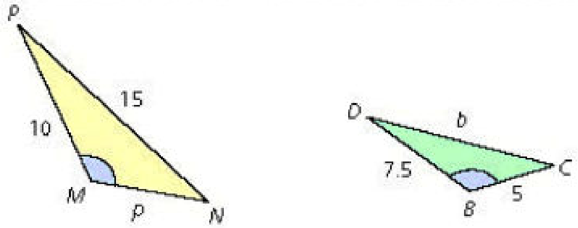
Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo de tres alumnos y resuelvan los siguientes problemas.

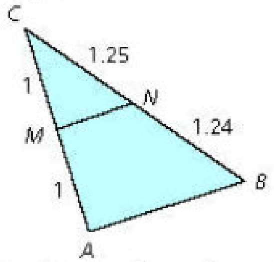
1. Los dos triángulos siguientes tienen sus lados paralelos. ¿Son semejantes? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.



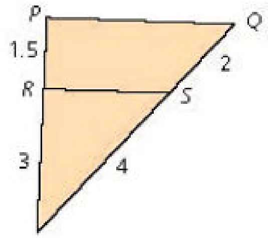
2. Éstas son las dimensiones de tres parejas de los elementos de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. ¿Hay semejanza? En caso afirmativo señala, en cada situación, los ángulos iguales y da la razón de semejanza.
   a) T_1: $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$ T_2: $d = 10$, $e = 14$, $f = 20$
   b) T_1: $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ T_2: $d = 15$, $e = 10$, $f = 12$
   c) T_1: $a = 45$, $b = 6$, $c = 10$ T_2: $d = 15$, $e = 6$, $f = 9$
3. Los ángulos marcados con el mismo color en los siguientes triángulos son iguales. Calcula b y p:



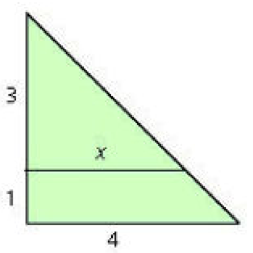
4. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, para comprobarlo justifica tu respuesta.
   a) Todos los cuadrados son semejantes.
   b) Todos los rectángulos son semejantes.
   c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
   d) Hay triángulos isósceles que no son semejantes.
   e) Dos triángulos isósceles en los que los ángulos desiguales miden lo mismo son semejantes.
   f) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de 35° cada uno son semejantes.
   g) Dos triángulos rectángulos con dos lados proporcionales son semejantes.
   h) $\overline{MN}$ y $\overline{AB}$ son paralelos. Observa la siguiente figura:



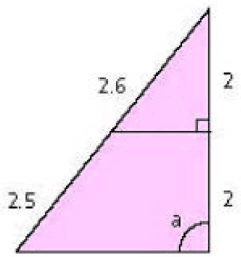
   i) $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ pueden cortarse si se prolongan lo suficiente. Observa la siguiente figura:



j) El valor de x es 3. Observa la siguiente figura:



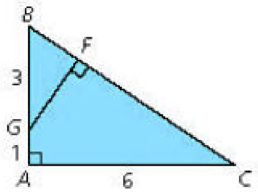
k) El valor de a es igual a 90°. Observa la siguiente figura:



Profundizando

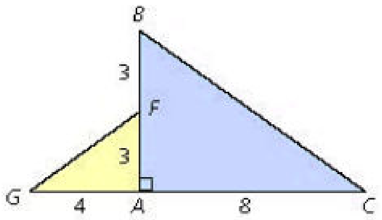
Resuelve los siguientes problemas.

1. Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 cm.
   a) Da las medidas de los lados de otros dos triángulos, uno más grande y otro más pequeño, que sean semejantes al triángulo dado. Especifica en cada caso la razón de semejanza.
   b) Dibuja el triángulo dado y el semejante pequeño.
2. Compara los ángulos de los $\triangle ABC$ y $\triangle FGB$ en la figura. ¿Son semejantes? Argumenta tu respuesta.

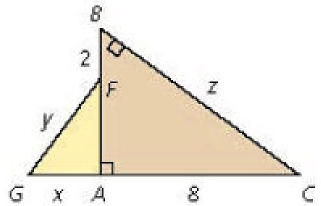


3. Se dan dos ángulos de $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$, ¿en qué casos son semejantes?
   a) T_1: $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$ T_2: $\angle M = 50°$, $\angle N = 90°$
   b) T_1: $\angle A = 65°$, $\angle B = 25°$ T_2: $\angle M = 80°$, $\angle N = 25°$
   c) T_1: $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$ T_2: $\angle M = 40°$, $\angle N = 81°$

   ¿Puedes dar la razón de semejanza?
   Escribe las correspondientes igualdades entre los lados de los triángulos.
4. Prueba que $\triangle ABC$ y $\triangle AFG$ son semejantes. Escribe la igualdad de ángulos:



5. ¿Son semejantes los $\triangle ABC$ y $\triangle AFG$? Calcula x, y y z con ayuda de la razón de semejanza. Observa la figura de la derecha.



Resumiendo

La congruencia es un caso especial de la semejanza.

Mientras dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño; otras dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Un triángulo es semejante al original:

a) Si los dos triángulos tienen un lado paralelo.
b) Si los dos triángulos tienen sus ángulos iguales.
c) Si los dos triángulos tienen lados paralelos dos a dos.
d) Si los dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman y el resto de los ángulos son proporcionales.
e) Si los dos triángulos tienen los tres lados proporcionales.
f) Si los dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual.

Para resolver los problemas de congruencia y semejanza de triángulos se requiere utilizar los criterios de semejanza de triángulos, así como las relaciones geométricas y otros recursos como sumas, multiplicaciones, divisiones y representaciones gráficas.

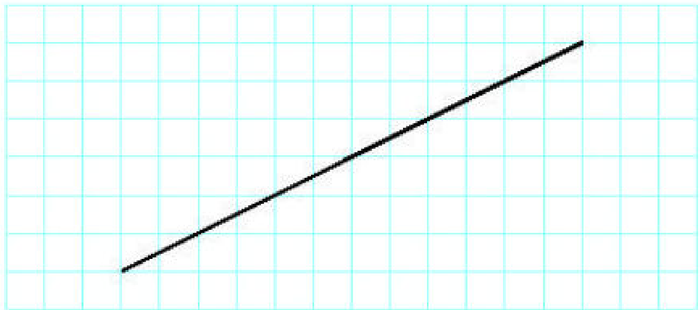
3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Tales de Mileto vivió hacia el año 624 a. n. e. Es el más antiguo de los siete sabios de Grecia y aunque se sabe muy poco de su vida, no hay duda en considerarle el padre de la geometría. Algunas de las anécdotas más conocidas de este sabio son haber predicho (gracias a sus conocimientos astronómicos) cómo sería la cosecha de aceitunas, razón por la que compró durante el invierno todas las prensas de aceite de Mileto y Quíos y las alquiló al llegar la época de recolección; otra fue la predicción de un eclipse solar (quizá llevada a cabo gracias al sistema babilónico) hacia el año 585 a. n. e. También se le atribuye haber realizado la medición de las pirámides mediante la sombra que proyectan, además de ser el primero en dar una explicación científica de un eclipse.

IDENTIFICA

Para esta situación necesitas una hoja de papel de cuadro chico.

1. Traza en tu cuaderno una línea como se observa en la siguiente figura.



Explora en internet

Visita la página http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/thales.html

En esta página encontrarás una actividad interactiva (o applet) donde podrás mover los puntos A, B y C para analizar lo que sucede.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

2. Marca con un punto cada intersección de la recta con la cuadrícula. Analiza esta situación y responde lo siguiente:
   a) ¿Cómo son los segmentos en que se dividió la recta?
   b) ¿En cuántos segmentos quedó dividida?

CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

a) ¿Qué podemos hacer para dividir la recta en dos partes iguales? Represéntalo.
b) Divide la misma recta en tres partes iguales.

COMUNICA

Observa y comenta con tus compañeros qué relación encuentras entre los segmentos de la recta.

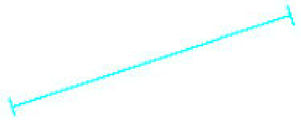
DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Escribe el procedimiento que se ha utilizado para dividir una recta en partes iguales.
2. Divide cada una de las siguientes líneas, para ello emplea el método anterior.

a) En cuatro partes iguales.

b) En cinco partes iguales.



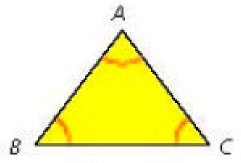
3. Traza en tu cuaderno dos triángulos de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm uno de ellos; y de 6 cm, 8 cm, y 10 cm el otro.
   a) Establece la proporcionalidad entre los lados.
   b) Comprueba con el transportador la medida de los ángulos.
   c) ¿Los triángulos son semejantes?

Profundizando

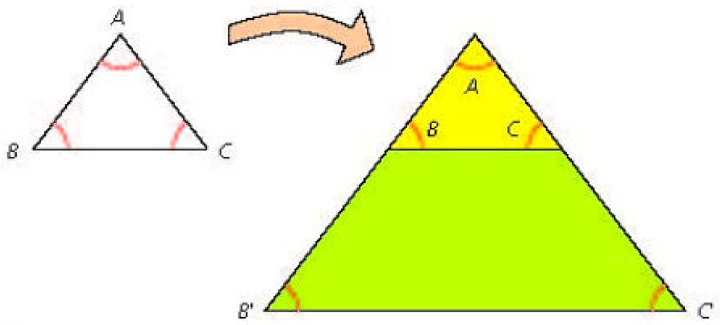
En esta lección retomaremos conocimientos que estudiamos en el bloque anterior.

Para esta actividad necesitas:

1. Dibujar un triángulo en una hoja y marcar los ángulos.



2. Fotocopia el triángulo ABC; indica que necesitas una ampliación del triángulo. (No importa el tamaño y denótalo $A'B'C'$.)
3. Recorta los dos triángulos.
4. Haz coincidir uno de los lados y el ángulo más pequeño con el más grande (en la figura se ha elegido el ángulo A para coincidir).



a) ¿Qué sucede con los lados BC y $B'C'$? Explica.
b) ¿Cómo son los ángulos B, B' y C, C'? Explica.

Ten en cuenta

Para saber si dos triángulos son semejantes, basta comprobar que se cumpla una de estas tres condiciones:

I. Tienen los tres ángulos iguales.
II. Tienen los tres lados proporcionales.
III. Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

COMUNICA

Comenta en el grupo por qué se puede asegurar que todos los ángulos o los lados de dos triángulos son iguales o proporcionales. Resuelvan sus dudas con ayuda del profesor. Escribe las conclusiones a que llegaron.

IDENTIFICA

Las siguientes figuras tienen relación con los criterios de semejanza.

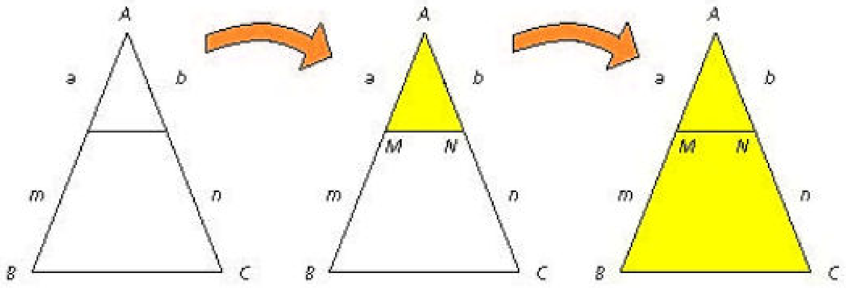


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Algo esencial

Toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros lados, determina un triángulo pequeño, ABC, semejante al grande, $A'B'C'$, eligiendo el ángulo A para coincidir; esto se conoce como el *Teorema de Tales*.

Al triángulo *ABC* se le ha trazado una recta paralela al lado *BC*, la cual forma un triángulo *AMN*, como se observa en la figura 2.

Los triángulos *AMN* y *ABC* son semejantes por tener los lados *MN* y *BC* paralelos, ya que entonces tienen los ángulos correspondientes iguales.

Con un compañero estudia la siguiente información que se relaciona con lo indicado anteriormente. Describe cómo se puede establecer la relación proporcional de los triángulos *AMN* y *ABC*.

CONSTRUYE

1 Escriban en grupo cuáles serían las proporciones entre las figuras I y II, II y III, y I y III.

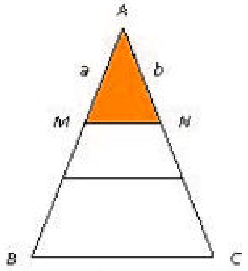


figura I

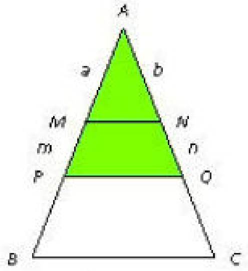


figura II

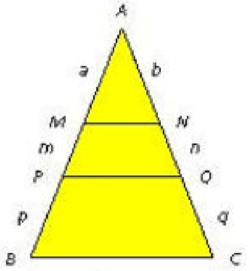


figura III

2 Compara tus resultados con la siguiente información:

Al triángulo *ABC* se le ha trazado una paralela *MN* a *BC*, formando así el triángulo *AMN*, como se observa en la figura I.

Trazamos otra paralela *PQ* a *BC* como se observa en la figura II y se forma así el triángulo *APQ*.

En el triángulo *AMN* y *APQ* se obtienen las relaciones proporcionales $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

En el triángulo *AMN* y *ABC* se obtiene $\frac{a}{b}=\frac{m+p}{n+q}$

De estos dos resultados obtenemos $\frac{m}{n}=\frac{m+p}{n+q}$

Realizando el producto cruzado obtenemos $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

Así $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ en consecuencia: Si $am=p$, entonces también $b=n=q$.

Ten en cuenta

Toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina la siguiente relación de proporcionalidad.

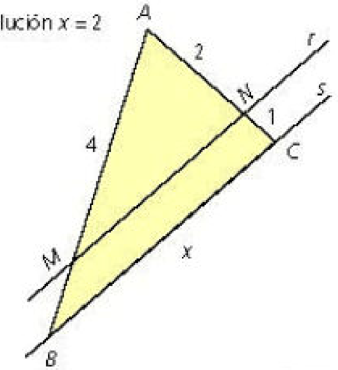
$$\frac{A}{m}=\frac{b}{n}$$

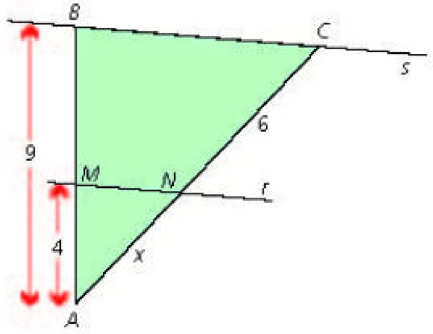
DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo que se te solicita a continuación.

1 Teniendo en cuenta que *r* y *s* son paralelas, utiliza el Teorema de Tales y verifica el valor que se proporciona del segmento desconocido en cada una de las figuras.

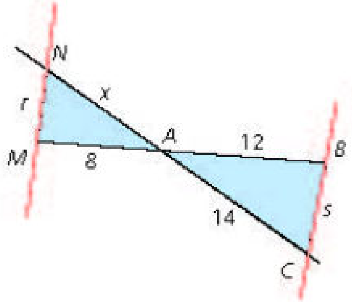
Solución $x = 2$



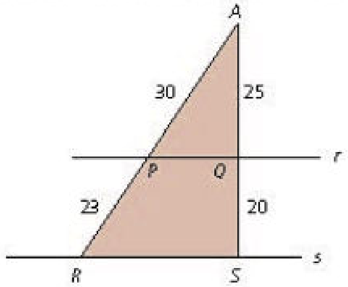


Solución $x = \frac{24}{5}$

Solución $x = \frac{28}{3}$



2 ¿Son paralelas las rectas *r* y *s*? Para saberlo debemos comprobar si existe alguna proporcionalidad entre los segmentos. Escribe tu respuesta y arguméntala.

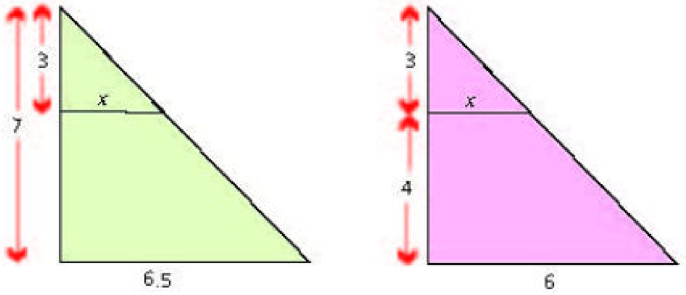


Ten en cuenta

Dos paralelos a un lado de un triángulo, que cortan a los otros dos lados, determinan la siguiente relación proporcional:

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

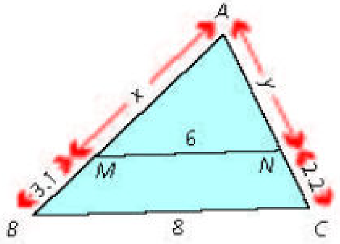
3. ¿El Teorema de Tales es válido en la situación anterior? Justifica tu respuesta y escucha la opinión de tus compañeros.
4. Calcula el valor de la letra que falta en las figuras siguientes, usando el Teorema de Tales.



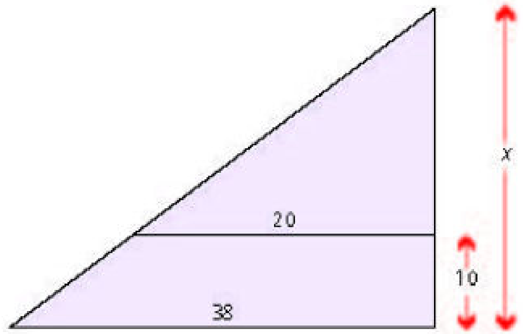
5. Halla los lados de $\triangle ABC$:
Ponemos $\overline{AM} = x$, $\overline{AN} = y$

$\overline{AB} = x + 3.1$

Por tanto $\overline{AC} = y + 2.2$



6. Determina el valor de x.



Ten en cuenta

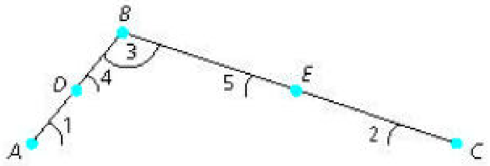
En el Teorema de Tales, la proporción entre segmentos puede escribirse de múltiples maneras. Cuando se utiliza haciendo intervenir los segmentos paralelos, sólo puede escribirse tal como hemos dicho, esto es, midiendo a partir del vértice.

COMUNICA

Compara tus resultados con los de tus compañeros. Resuelvan sus dudas con ayuda del profesor. Plantea ante el grupo otros ejemplos de semejanza que se puedan resolver con el Teorema de Tales.

IDENTIFICA

Ahora, traza en tu cuaderno dos segmentos de recta AB y BC, y divídelos en dos partes iguales, como se observa en la siguiente figura.



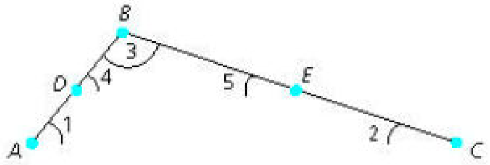
CONSTRUYE

Reflexiona la actividad anterior y responde las siguientes preguntas.
1. ¿Cómo son los segmentos DE y AC?
2. ¿Qué relación existe entre los ángulos 1 y 4?, ¿y entre los ángulos 2 y 5?
3. ¿Los triángulos ABC y DBE son semejantes? ¿Por qué?
4. ¿Cuál es la razón entre los lados del triángulo ABC y DBE?
5. Si los triángulos ABC y DBE son semejantes, ¿cómo son sus lados?

DECIDE

Analiza las respuestas de las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

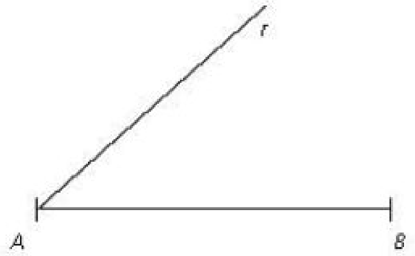
Si se traza una paralela a uno de los lados de un triángulo, ¿se obtiene otro triángulo semejante? Utiliza la siguiente figura para demostrarlo.



IDENTIFICA

Los conocimientos que hemos estudiado nos permiten dividir un segmento en partes iguales. Revisemos cuál es el procedimiento con el siguiente ejemplo.

Divide un segmento AB en cuatro partes iguales.

Traza el segmento AB.	
Traza una recta r por A.	

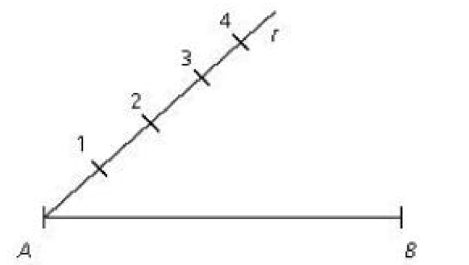
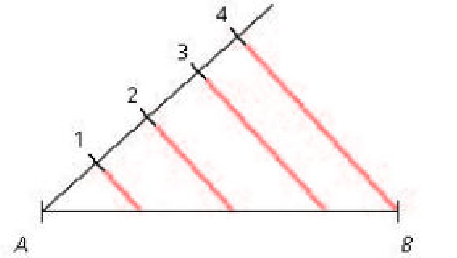
Marca cuatro segmentos iguales a partir de *A* en *r*.	
Se unen los cuatro puntos con el segmento *AB*. Trazando paralelas el punto 4 se une con *B*.	

Tabla 3.9

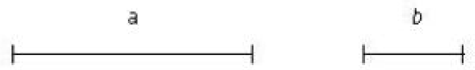
CONSTRUYE

Escribe con tus palabras el procedimiento que se utilizó para dividir un segmento en partes iguales.

DECIDE

Forma un equipo con tres de tus compañeros y resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1 Divide un segmento *AB* en 9 partes iguales.
2 Divide un segmento *AB* en dos partes proporcionales a los siguientes segmentos dados:



3 Divide un segmento *AB* en partes proporcionales 1, 2 y 3.
4 Divide un segmento *AB* en dos partes, una el doble que la otra.

COMUNICA

Comenta con tus compañeros cuál fue la principal dificultad a que te enfrentaste al dividir los segmentos; también expón cómo dividirías un segmento en una razón dada; por ejemplo 5 a 2, 3 a 4 o 5 a 10.

Manejo de técnicas con eficiencia

1 Formen equipos de tres alumnos y resuelvan los siguientes problemas, en los que deben reflexionar en la estrategia para su resolución. Argumenten sus respuestas y comuníquenlas al grupo para su análisis.

En las siguientes figuras se indica cómo se representa $\frac{1}{5}$ en un segmento que representa la unidad.

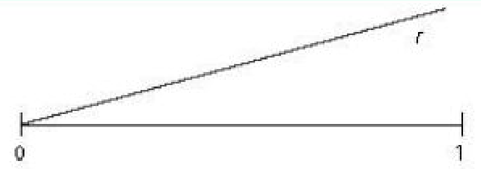
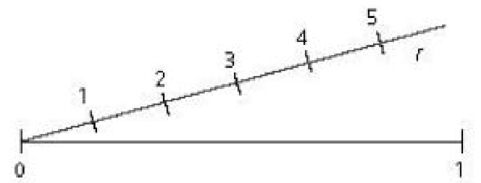
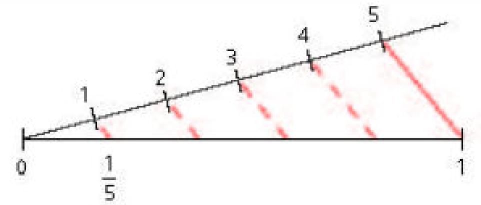
Traza un segmento que represente la unidad.	
Traza una recta *r* por 0.	
Marca 5 segmentos iguales a partir de 0 en *r*.	
Se unen los puntos con el segmento que represente la unidad. El punto se une con el punto localizado en 1.	

Tabla 3.10

2 Escribe el procedimiento que utilizarías para representar $\frac{7}{5}$.
3 Divide un segmento de 8 cm en partes cuya razón sea:

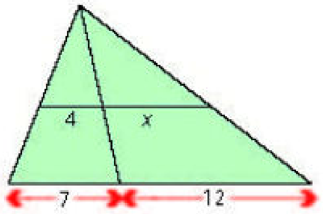
a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{4}$

4 Cuentan que Tales, para medir la altura de la pirámide de Keops, que tiene una base cuadrada de 230 m de lado y una altura de 138 m, clavó un palo en la tierra al lado de la pirámide. Cuando la sombra y el palo tuvieron la misma longitud, mandó medir la sombra de la pirámide. ¿Cuál fue la medida de ésta?

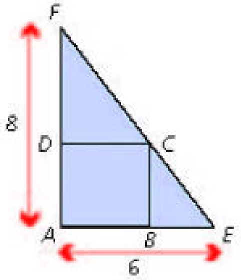
Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

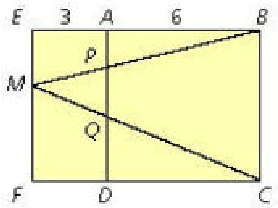
1. ¿Cuántos elementos tienen en común los triángulos R y S, ya sea de ángulos o de lados? Constrúyelos con la siguiente información y argumenta tu respuesta.
   R: $a = 12$, $b = 18$, $c = 8$ S: $m = 12$, $n = 18$, $p = 27$
2. Da las medidas de dos triángulos que no sean iguales y que tengan en común cinco medidas. ¿Pueden dos triángulos como los que se piden tener los tres lados iguales?
3. Calcula x en la siguiente figura. Explica tus cálculos con claridad y, para ello, pon letras a los puntos que te hagan falta:



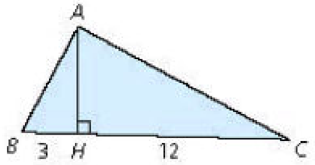
4. Se sabe que $ABCD$ es un cuadrado inscrito en un triángulo rectángulo. Observa la siguiente figura.
   a) Calcula su lado.
   b) ¿Son semejantes $\triangle AEF$ y $\triangle CEB$?



5. En la siguiente figura, $EBCF$ es un rectángulo y $ABCD$ es un cuadrado. M es un punto cualquiera en el segmento EF.
   a) Demuestra que $\frac{\overline{MP}}{\overline{MB}} = \frac{1}{3}$.
   b) Demuestra que $\overline{PQ} = 2$.
   c) Explica por qué la longitud de $\overline{PQ}$ no depende de la posición de M sobre el lado EF.



6. El triángulo ABC es rectángulo en A y la altura divide BC como indica la siguiente figura. Comprueba que $\triangle ABH$ y $\triangle ACH$ son semejantes y escribe la proporcionalidad entre sus lados.



Explora en internet

Visita la página http://www.dailymotion.com/video/xjtkbf_teorema-de-thales_tech

En este sitio encontrarás un video que explica cómo se aplica el Teorema de Tales para resolver problemas de situaciones cotidianas; el tiempo de duración es aproximadamente de 16 minutos.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Resumiendo

El Teorema de Tales afirma que si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en otras.

En un triángulo, el teorema indica que si se traza un segmento paralelo a uno de los lados del triángulo se obtiene otro triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primer triángulo.

Este teorema permite calcular distancias inaccesibles y la longitud de un segmento cuando se conoce la correspondiente en la otra recta y la proporción entre ambas líneas.

Por ejemplo, el Teorema de Tales sirve para calcular la altura de monumentos, edificios, estatuas, puentes, entre otros. Esto se realiza con la proyección de la sombra del objeto y una estaca para formar un triángulo, entonces se plantea una relación de triángulos semejantes.

3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

La utilización del zoom o de distintos accesorios en una máquina fotográfica o en una cámara de video permite obtener la imagen de objetos, personas, etcétera, en diferentes tamaños. Estas imágenes tienen la misma forma, es decir, son semejantes. Lo único que varía son las dimensiones.

Las dimensiones de la imagen captada por la cámara están relacionadas con la distancia focal, que puede hacerse variar con el zoom o al intercambiar objetivo.

Explora en internet

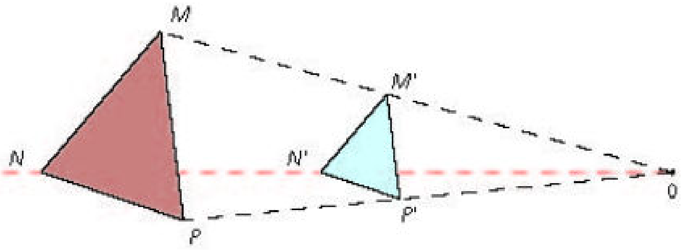
Visita la página http://www.oma.org.ar/omanet/educabri/00-10.htm

Este sitio está dedicado al estudio de la homotecia.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

IDENTIFICA

Describe la siguiente figura utilizando tus conocimientos sobre semejanza.



CONSTRUYE

De acuerdo con lo estudiado en el Teorema de Tales y en la actividad anterior, responde a lo que se solicita a continuación.

1. Realiza la medición de la figura y registra los datos en la razón correspondiente.

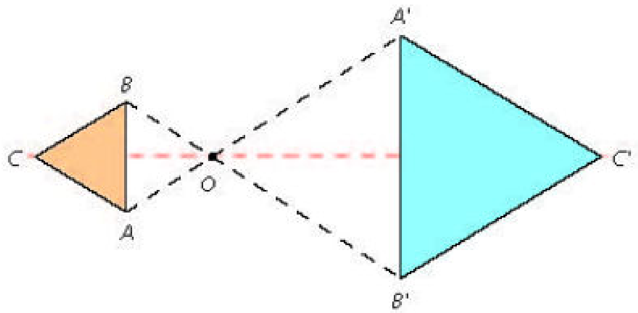
$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{NP}}{\overline{N'P'}} = \_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}} = \_\_\_\_\_$

2. Comprueba que el triángulo MNP es semejante al triángulo $M'N'P'$.
3. Escribe la relación de proporcionalidad de los lados de estos triángulos.

DECIDE

Analiza la actividad anterior y, con base en la siguiente figura:

Algo esencial
Dos o más figuras geométricas son homotéticas si son semejantes y sus puntos correspondientes son tales que todos los segmentos de rectas que los unen concurren en un mismo punto llamado *centro de homotecia*.



a) Obtén la medida de los lados de los triángulos y regístrala.

$\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} =$

$\frac{\overline{OC}}{\overline{O'C'}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} =$

$\frac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} =$

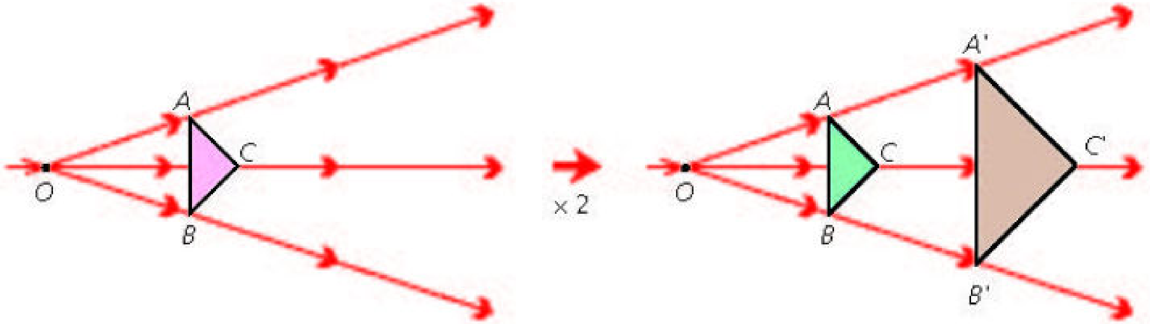
b) Los triángulos ABC y $A'B'C'$, ¿son homotéticos? Argumenta tu respuesta.

COMUNICA

Analiza tu respuesta con tus compañeros y tu profesor. Escriban sus conclusiones.

IDENTIFICA

En estas figuras, se pasa del triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$ multiplicando por 2 los OA, OB y OC.



CONSTRUYE

La nueva figura tiene los lados paralelos a la inicial:

- Los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OA'B'$ son semejantes porque tienen dos lados proporcionales.

  $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = 2$ y el ángulo comprendido igual.

  Luego, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son paralelos por el Teorema de Tales.

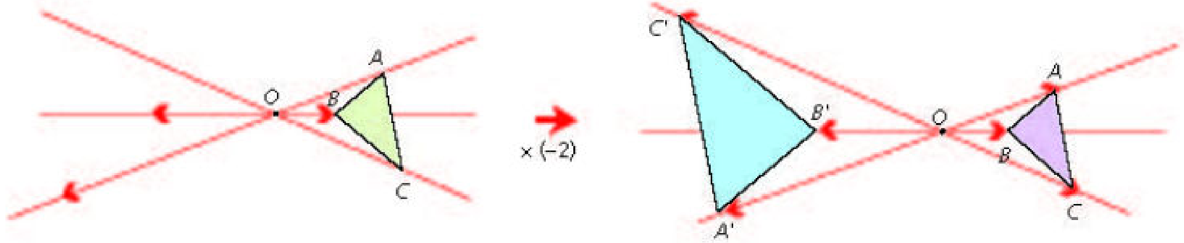
- El mismo razonamiento vale para los otros dos pares de triángulos: $\triangle OBC$ y $\triangle OB'C'$, $\triangle OAC$ y $\triangle OA'C'$; luego los lados $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ y los lados $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son paralelos.

1. ¿Cómo es la nueva figura respecto a la inicial? ¿Qué propiedades encuentras en estas figuras? Explica tus respuestas.

Algo esencial
La *homotecia* es *directa*, si las dos figuras están situadas a un mismo lado del centro de homotecia.
La *homotecia* es *inversa*, si las figuras están situadas a distintos lados del centro de homotecia.

IDENTIFICA

Se pasa de una figura a otra multiplicando por −2 los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.



1. ¿Cómo es la nueva figura respecto a la inicial? Compara este resultado con el anterior.

CONSTRUYE

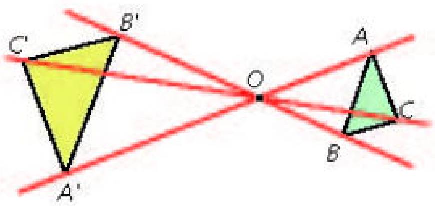
Analiza las actividades anteriores y contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. Explica este caso como se hizo en el anterior ejercicio.

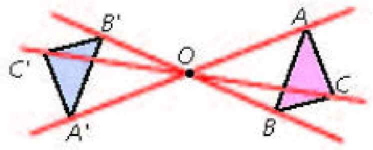
IDENTIFICA

Explora cada una de las seis posibilidades, teniendo en cuenta el tamaño y posición de la figura obtenida en relación con la original. ¿Qué diferencias observas entre los casos siguientes?

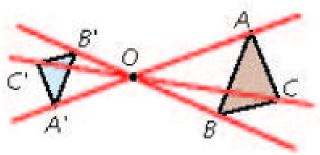
1. $k < -1$ Figura mayor inversa



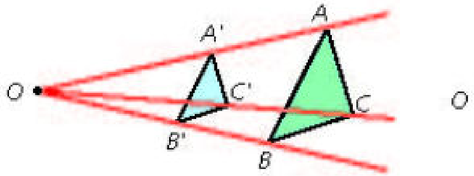
2. $k = -1$ Figura simétrica



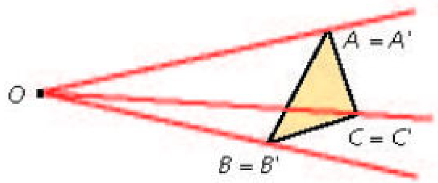
3. $-1 < k < 0$ Figura menor inversa



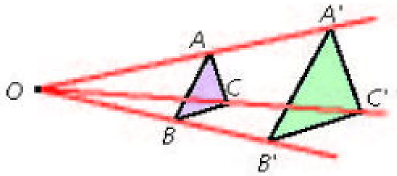
4. $0 < k < 1$ Figura menor directa



5. $k = 1$ Figura igual



6. $k > 1$ Figura mayor directa



Algo esencial

Dado un punto O y un número $k \neq 0$, se llama *homotecia* a la transformación que hace corresponder a un punto A de otro A', alineados con O, tal que:

$$\overline{OA'} = k\overline{OA}$$

- Si $k > 0$, A y A' están al mismo lado de O.
- Si $k < 0$, A y A' están en distinto lado de O.

La homotecia se designa por $H(O, k)$.

En una homotecia:

- O se llama *centro de homotecia*.
- k se llama *razón de la homotecia*. Si $k > 0$, la *homotecia* es *directa*; en caso contrario, es *inversa*.

Los puntos correspondientes se dice que son homotéticos y las figuras correspondientes son homotéticas.

CONSTRUYE

Analiza la información anterior y contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. Escribe con tus propias palabras lo que sucede cuando una homotecia tiene la razón igual, menor o mayor que 1 o que –1.

COMUNICA

Discute con tus compañeros qué relación encuentran entre la proporcionalidad y la homotecia. Pidan ayuda a su profesor cuando surjan dudas. Escribe en tu cuaderno las conclusiones que obtengan.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

En esta actividad realizaremos la construcción de un triángulo homotético con su centro O en el interior de la figura y de $k = 2$.

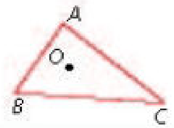
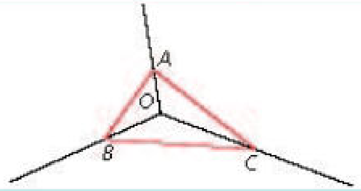
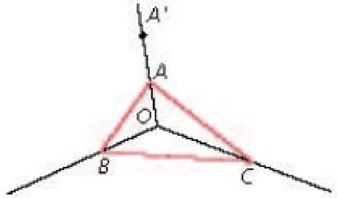
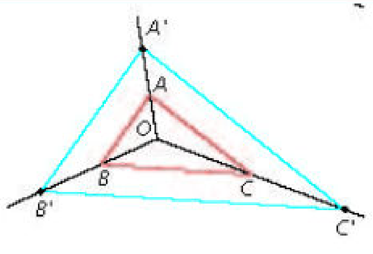
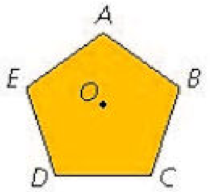
1. Consideremos el triángulo ABC y el punto O en el interior.	
2. Se trazan las rectas que unen el centro de la homotecia (O) con cada uno de los vértices del triángulo ABC.	
3. Se halla el punto A' homotético de A, midiendo la distancia de O a A y multiplicándola por 2.	
4. Por A' se traza una paralela al segmento AB que corta el segmento OB en B'. Por B' se traza una paralela al segmento BC que corta el segmento OC en C'.	

Tabla 3.11

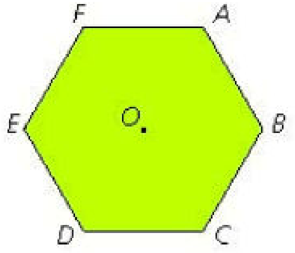
Este triángulo, por tener los lados paralelos al dado, es semejante a él y la razón de semejanza es 2, ya que $A'B' = 2AB$.

Escribe con tus palabras el procedimiento para construir la homotecia en una figura que tiene su centro de homotecia en el interior.

Resuelve los siguientes problemas.
Construye la figura homotética de los polígonos con las siguientes características.



Centro homotético en O
Razón de semejanza $k = 3$.



Centro homotético en O
Razón de semejanza $k = -2$.

Ten en cuenta

Si C es el centro de la circunferencia y O el centro de la homotecia, entonces C se transforma en C', de modo que:

$\overline{OC'} = k\overline{OC} = k.$

$\overline{C'P'} = k\overline{CP} = k$, siendo P y P' puntos cualesquiera de las circunferencias, respectivamente.

Luego los puntos C' y P' determinan la circunferencia homotética.

La razón de los radios es:

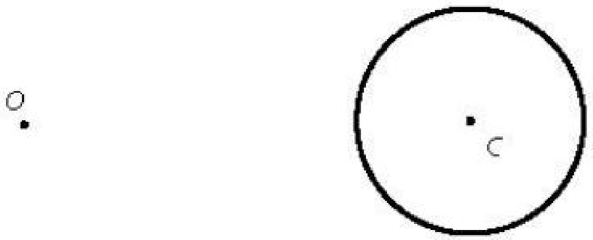
$\dfrac{\overline{C'P'}}{\overline{CP}}$

DECIDE

Analiza la información anterior y contesta en tu cuaderno lo siguiente:

Dada la circunstancia de la figura, construye su homotética siguiendo:

a) El centro O y la razón 1.
b) El centro O y la razón –1.

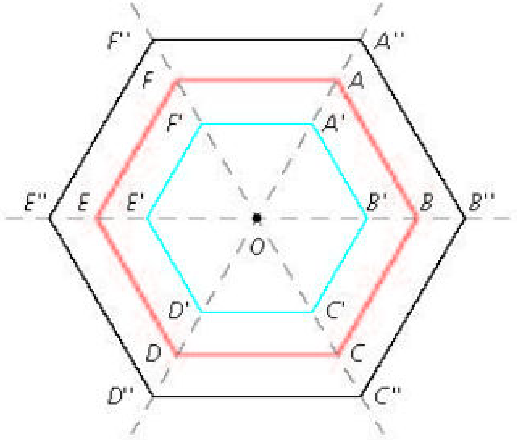


COMUNICA

Discute con tus compañeros cuáles características de una figura varían en una homotecia y cuáles se conservan. Escribe en tu cuaderno las conclusiones que obtengan.

Profundizando

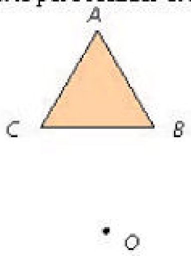
I. El hexágono $ABCDEF$ con centro homotético en O, es el original. Se le ha aplicado una ampliación y una reducción.



1. Encuentra la razón de homotecia del hexágono original al hexágono $A''B''C''D''E''F''$.
2. Encuentra la razón de homotecia del hexágono original al hexágono $A'B'C'D'E'F'$.
3. Establece la razón de semejanza entre los lados del hexágono original con el hexágono $A'B'C'D'E'F'$.
4. ¿Son semejantes los tres hexágonos? Explica tu respuesta.

II. Dibuja un triángulo equilátero con centro homotético en el exterior, como se muestra en la figura de la derecha:

a) Construye la figura homotética de ella con una razón de homotecia: $k = -2$, $k = 2$, $k = 5$.
b) Explica el procedimiento que utilizaste para realizar estas construcciones.



Ten en cuenta

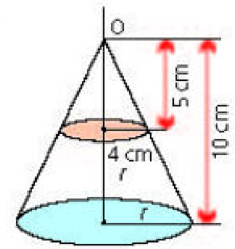
Las homotecias de razón k transforman:

- Segmentos en segmentos paralelos y de razón k.
- Ángulos en ángulos iguales.
- Triángulos en triángulos de lados paralelos y razón k.
- Circunferencias en circunferencias de razón k.

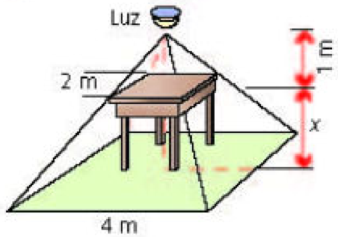
Resolviendo problemas

En las siguientes figuras aparecen triángulos donde se presenta la homotecia. Encuentra el dato desconocido que se indica con la letra.

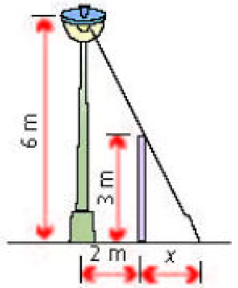
a)



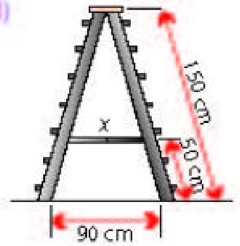
b)



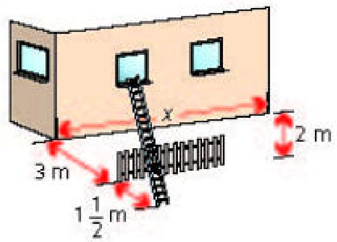
c)



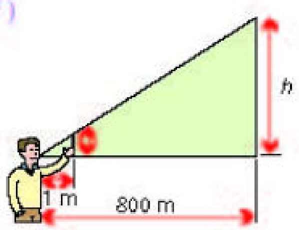
d)



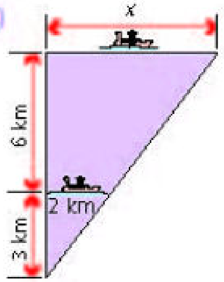
e)



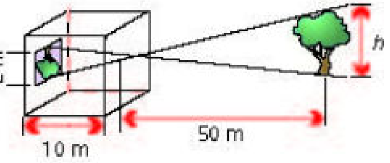
f)



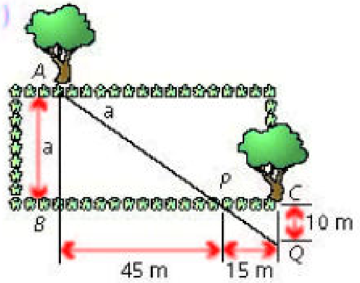
g)



h)



i)



Resumiendo

La *homotecia* se presenta cuando los puntos correspondientes de dos figuras semejantes son tales que los segmentos de rectas que los unen concurren en el centro de homotecia.

Si las figuras se encuentran situadas del mismo lado del centro de homotecia, entonces ésta es *directa*.

Si las figuras se encuentran situadas de lados diferentes del centro de homotecia, ésta es *inversa*.

En una construcción homotética se cumple que los segmentos que unen puntos correspondientes con el centro de homotecia son proporcionales.

En una *homotecia directa* las *figuras* pueden ser mayores, menores o iguales.

En una *homotecia inversa* las *figuras* resultantes pueden ser mayores, menores o *simétricas*.

La homotecia se puede definir como la transformación que hace corresponder a un punto A de otro A', alineados con el centro de homotecia O, de tal manera que: $\overline{OA'} = k\overline{OA}$, donde:

- Si $k > 0$, A y A' están al mismo lado de O.
- Si $k < 0$, A y A' están en distinto lado de O.

Proporcionalidad y funciones

3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

En todos los fenómenos que acontecen en la naturaleza, ya sean físicos, químicos o sociales, existe la mayoría de las veces una relación funcional con características diferentes, las cuales determinan expresiones algebraicas muy variadas. En los temas anteriores estudiamos las de comportamiento lineal, su gráfica y su expresión algebraica; ahora analizaremos las que no son lineales.

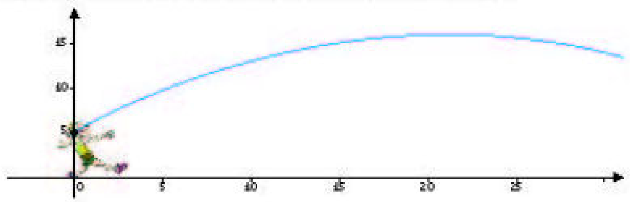
IDENTIFICA

El lanzador de bala

El lanzador de Bala

Nota que $x = 0$ cuando el lanzador tiene el tiro (una bola de metal pesada en su mano) el tiro aún no ha salido. El lanzador inicia su tiro desde el hombro, entonces y (la altura) no es 0 cuando $x = 0$.

Por lo que un lanzador de bala puede ser modelado usando la ecuación $y = 5.5 + x - 0.0241\,x^2$, donde x es la distancia recorrida (en pies) y y es la altura (también en pies). ¿Qué tan largo es el tiro?



Gráfica 3.1

Explora en internet

Visita la página http://www.tianguisdefisica.com/Actividades.html

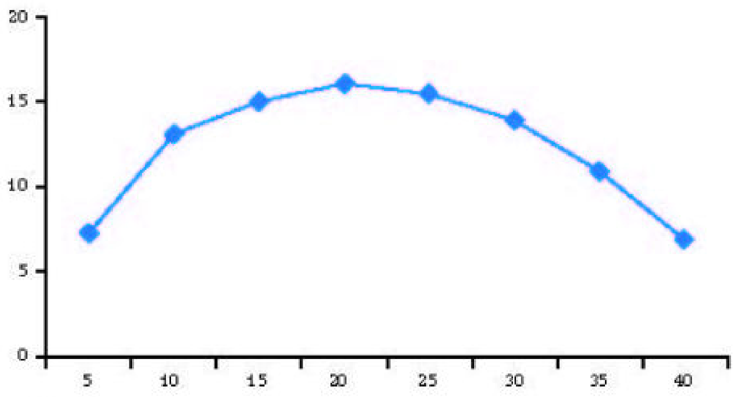
En este sitio titulado "Tianguis de Física" existen múltiples experimentos de la física; selecciona la sección "Mecánica", en donde se presentan las actividades "Dominó", "Rodar y rodar" y "Péndulo dibujante".

En todos los experimentos hay videos que muestran situaciones para analizar cada movimiento, de qué depende el que un objeto viaje rápido o lento.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

CONSTRUYE

1 Con la información anterior, se elaboró la siguiente gráfica, ¿se puede contestar la pregunta con ella?



Gráfica 3.2

2 Completa la tabla.

Distancia (ft)	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Altura (ft)									

Tabla 3.12

DECIDE

1 ¿Cuál es la máxima altura alcanzada?
2 ¿Cuál es la máxima distancia alcanzada?
3 Investiga la distancia que existe entre el planeta Tierra y el Sol. Calcula el tiempo que tarde en llegar la luz del Sol a nuestro planeta.

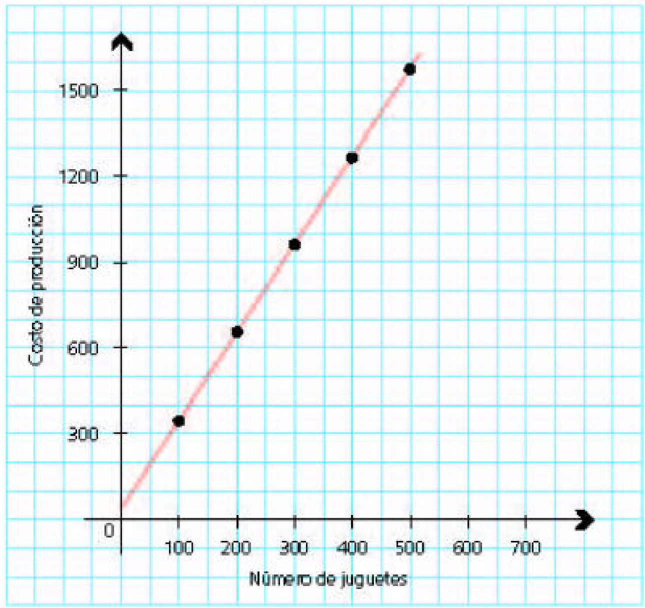
COMUNICA

Comenta con tus compañeros las dificultades que enfrentaste al interpretar la gráfica, al determinar los valores de la tabla y cómo encontraste las soluciones. Escribe en tu cuaderno las conclusiones que obtuvieron en este debate.

IDENTIFICA

Producción de juguetes

En una junta realizada en la fábrica de juguetes del señor Uriel, se presentó la siguiente gráfica para explicar la relación entre el número de juguetes y su costo de producción.



Gráfica 3.3

1 El señor Uriel quiso saber lo siguiente:
a) ¿Cuánto costaría fabricar 1 000 juguetes?
b) Con una inversión de $3650, ¿cuántos juguetes se fabricarían?

CONSTRUYE

1 Para contestar estas y otras preguntas que pudieran surgir, se decidió organizar la información de otras maneras. Es necesario que las realices tú.
a) Elabora la tabla correspondiente a la gráfica anterior.

Número de juguetes	100	200	300	400						
Costo de producción										

Tabla 3.13

DECIDE

Apóyate en la información anterior para responder las siguientes preguntas.
1 ¿Qué tipo de función es? Explica.
2 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación?

COMUNICA

Compara y verifica la fórmula que encontraste con el grupo. Debatan las diferencias y escriban una conclusión al respecto.

IDENTIFICA

Crecimiento de una planta

Rubén tiene en su casa una planta que día con día cuida con mucho cariño. Todas las semanas anota lo que mide en la siguiente tabla.

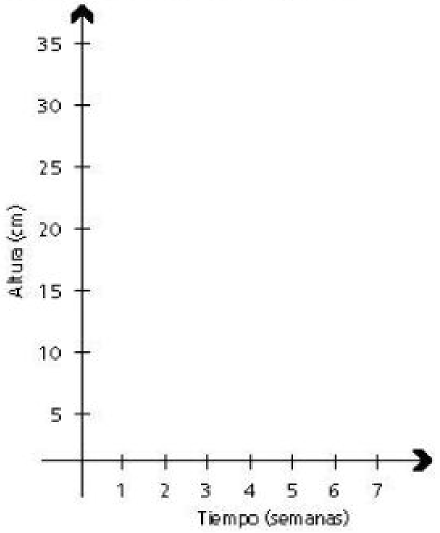
Tiempo (semanas)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura (cm)	5	9	14	20	24	26	29	34

Tabla 3.14

¿Cuál es la representación gráfica de esta situación?

CONSTRUYE

Con la información de la tabla anterior, elabora la gráfica.



DECIDE

Analiza e interpreta la información anterior y contesta en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

1. ¿El crecimiento de la planta con respecto del tiempo es una función?
2. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
3. ¿Es una función lineal o no lineal? Explica.

IDENTIFICA

Realiza un experimento

1. Coloca cinco frijoles con algodón mojado dentro de un frasco de vidrio.
   a) Registra su crecimiento en una tabla cada tres días.
   b) Realiza la gráfica correspondiente.

Caída libre de los cuerpos

En Física, para calcular la altura recorrida en 1, 2, 3,... segundos por un objeto que se deja caer en el vacío (ausencia total de aire), se utiliza la siguiente fórmula:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad g = 9.8\frac{m}{s^2}$$

en donde:
h: altura recorrida por el cuerpo en su caída (en metros)
t: tiempo transcurrido desde el inicio de la caída (en segundos)
g: aceleración producida por la atracción de la Tierra.

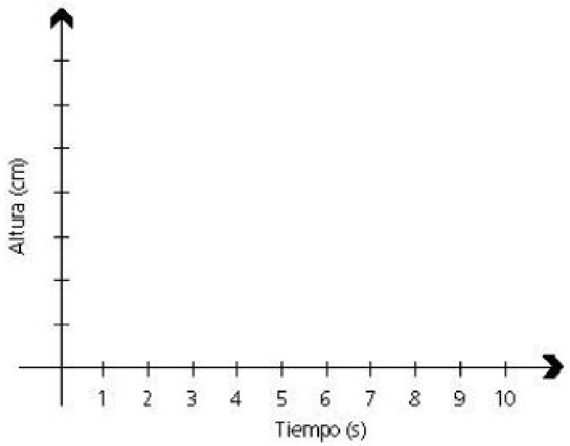
¿Cuál es la altura a partir del tercer segundo? Completa la siguiente tabla para averiguar la respuesta.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura (m)	0	4.9	19.6								

Tabla 3.15

CONSTRUYE

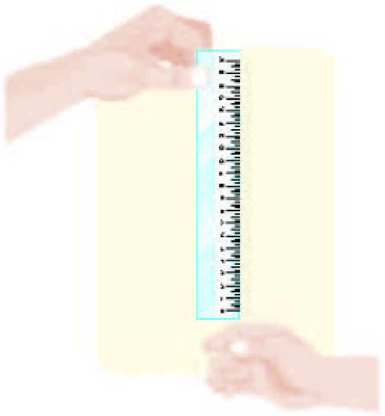
Con la información de la tabla anterior realiza la gráfica correspondiente.



IDENTIFICA

Realiza un experimento

Utiliza una regla graduada y colócala como se observa en la figura de la derecha. Pide a un compañero que la sujete de arriba, colocando el 0 en la posición de abajo. Tu compañero soltará la regla y tú tendrás que sujetarla. Registra la medida obtenida en una tabla y trata de mejorar tu velocidad de reacción. Posteriormente elabora la gráfica.



Mide la temperatura

Dos de las escalas de temperatura más usadas son las escalas Fahrenheit y la de centígrados. En la siguiente tabla se representa la relación entre ellas.

°F	32	41	50	59
°C	0	5	10	15

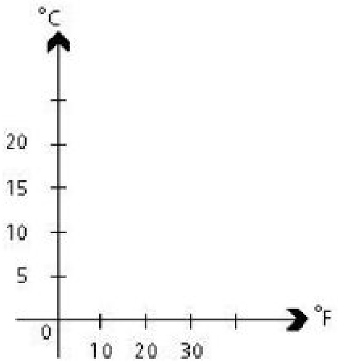
Tabla 3.16

¿Cómo graficarías esta información?

CONSTRUYE

Analiza la información anterior y realiza en tu cuaderno lo que se pide a continuación:

1. Grafica los datos de la tabla anterior.



2. ¿Es una función lineal o no lineal? Explica.
3. Encuentra la expresión algebraica de esta función.

DECIDE

Analiza lo aprendido en las actividades anteriores y contesta en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

El plano cartesiano

a) La gráfica de una función del tipo $y = mx + b$ pasa por los puntos A (–1, 8) y B (4, –2). ¿Pasará por el punto C (–2, 10)?
b) La gráfica de una función del tipo $y = x^2$ pasa por los puntos A (1, 1) y B (2, 4). ¿Pasará por el punto C (0, 0) y D (–2, 4)?
c) La gráfica de una función del tipo $y = x^3$ pasa por los puntos A (2, 8) y B (–1, –1). ¿Pasará por el punto C (–3, –27)?

COMUNICA

Argumenta tus respuestas ante el grupo. Comenta las diferencias que surjan y obtén una conclusión. Escríbela en tu cuaderno.

IDENTIFICA

Gráficas en la medicina

Gráficas de crecimiento para mujeres y hombres:

Gráfica 3.4

¿Quiénes son más altos, los hombres o las mujeres?

CONSTRUYE

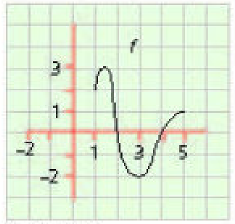
Analiza e interpreta la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se pide a continuación.

1. ¿Entre qué edades son más altas las mujeres que los hombres?
2. ¿A qué edad tienen la misma altura los hombres y las mujeres?
3. Traza una gráfica aproximada que describa la diferencia de talla entre hombres y mujeres en función de la edad.

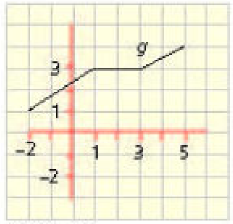
DECIDE

De acuerdo con las actividades anteriores, contesta en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

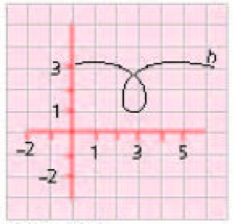
Observa las gráficas siguientes.



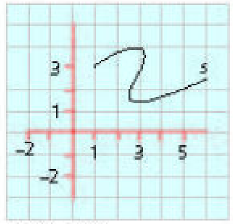
Gráfica 3.5



Gráfica 3.6



Gráfica 3.7



Gráfica 3.8

1. Las gráficas de f y g representan funciones pero no las de h y s. Explica.
2. Para las funciones f y g calcula: f (3), f (5), g (1.5) y g (–0.5).
3. Calcula x de modo que $f(x) = 0$.
4. Calcula x de modo que $g(x) = 3$.
5. Determina el dominio e imagen de f y de g.

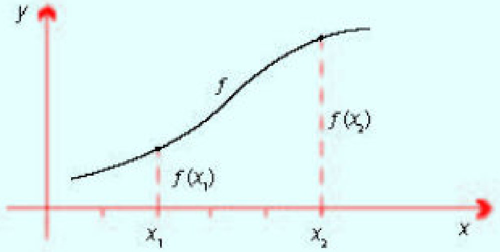
COMUNICA

Argumenta tus respuestas ante el grupo. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

Algo esencial

Creciente: una función es creciente si su gráfica, leída de izquierda a derecha, es ascendente. Esto significa que al aumentar la variable x también aumenta la variable y.

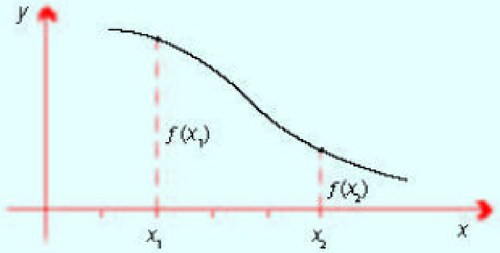
f creciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$



Decreciente: una función es decreciente si su gráfica es descendente.

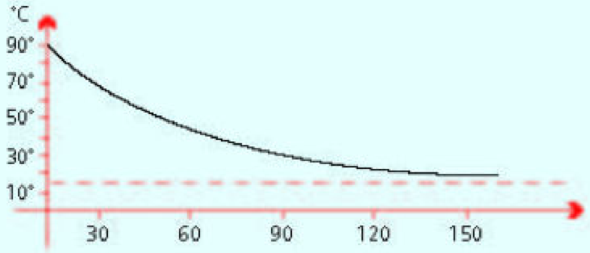
Esto significa que al aumentar la variable x, la variable y disminuye.

f decreciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$



Ejemplo

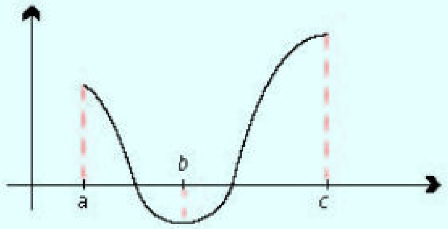
Unas funciones decrecientes famosas: las gráficas de enfriamiento.



La temperatura del aceite decrece lentamente y va aproximándose a la temperatura ambiente del laboratorio donde se realiza el experimento.

Intervalos de crecimiento

Frecuentemente, las funciones tienen intervalos donde crecen y donde decrecen. Así, para la función de la figura,

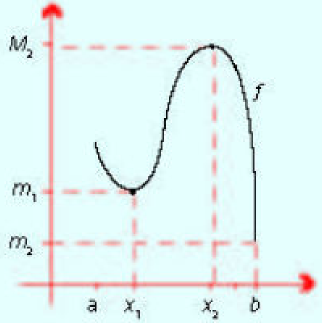


f es decreciente en el intervalo a, b.

f es creciente en el intervalo b, c.

Ejemplo

- Máximo en x_2: la función pasa de ser creciente a decreciente.
- Mínimo en x_1: la función pasa de ser decreciente a creciente.



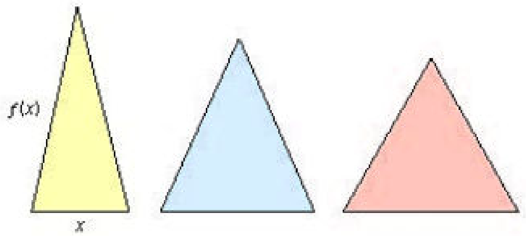
Resolviendo problemas

Después de resolver los siguientes problemas, compara tus resultados y obtén conclusiones dialogando y debatiendo los resultados con tus compañeros.

1 Con un hilo de 10 cm podemos formar una infinidad de triángulos isósceles. Si variamos la longitud de la base (lado desigual), varía con ella la longitud de cada uno de los otros dos lados iguales:

x	...	1	2	3	...
f(x)	...				...

Tabla 3.17



Algo esencial

En x se alcanza un *máximo local* si su ordenada es mayor que la de los puntos próximos, tanto a la derecha como a la izquierda de x.

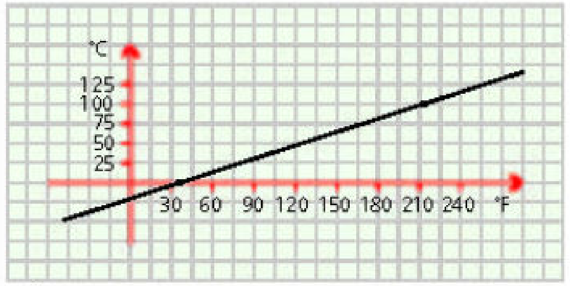
En x se alcanza el *máximo absoluto* si su ordenada es la mayor de las ordenadas de todos los puntos del dominio.

En x se alcanza un *mínimo local* si su ordenada es menor que la de los puntos próximos, tanto a la derecha como a la izquierda de x.

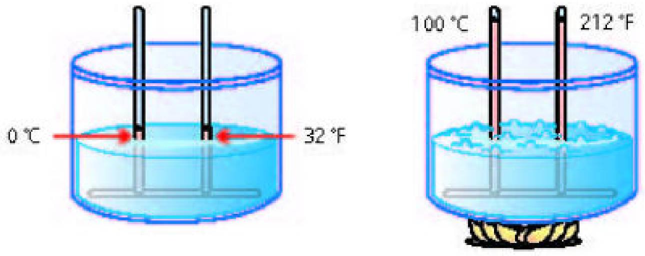
En x alcanza el *mínimo absoluto* si su ordenada es la menor de las ordenadas de todos los puntos del dominio.

a) Completa la tabla —añade puntos si es necesario— y represéntala.
b) ¿Pueden unirse los puntos de la gráfica? ¿La función es continua? ¿Es creciente?
c) Indica el dominio y la imagen. Interpreta el resultado.
d) Tanto el máximo como el mínimo absolutos representan triángulos un tanto raros. Explica lo que ocurre.

2 La escala centígrada de temperaturas (escala Celsius) está graduada de 0 a 100. La escala Fahrenheit —usada en los países anglosajones— está graduada desde 32 a 212. En ambas escalas, el extremo inferior corresponde al punto de congelación del agua y el superior al punto de ebullición.



Gráfica 3.9



a) Dos puntos definen la recta. Los puntos (32, 0) y (212, 100) permiten conocer la fórmula para convertir grados Fahrenheit a centígrados. Calcúlala.

(Deberás llegar a $y=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$).

b) Intervienen los negativos. Expresa en grados centígrados:
• 45 °F • 18 °F • 0 °F • 451 °F

Comprueba que tus resultados sean acordes con la gráfica.
c) ¿Se inquietaría un médico inglés al observar en un paciente una temperatura de 100 °F?
d) Imagen inversa. Expresa en grados Fahrenheit:
("Usa la fórmula y después comprueba en la gráfica")
• 15 °C • 0 °C • 90 °C
e) ¿Qué temperatura se expresa con el mismo número en °C y en °F?
f) ¿Cómo tienen que ser x y y en la fórmula $y=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$?

Explora en internet

Visita la página: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/02/matematicas-02.html
En este sitio encontrarás un estudio detallado sobre las funciones. Selecciona "Actividades de detección de conocimientos previos". Ahí hallarás múltiples problemas, todos con situaciones curiosas y prácticas.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Resumiendo

En este apartado aprendimos que una función es la relación de dos conjuntos de cantidades, donde a cada valor de un conjunto le corresponde un único valor del segundo conjunto. Esta relación propicia una expresión algebraica y su representación gráfica.

- Las gráficas describen una función que relaciona dos conjuntos de cantidades.
- La gráfica de una *función cuadrática* es una *curva*, la de una *función lineal* es una línea *recta*.
- La variable independiente se coloca en el eje horizontal.
- La variable dependiente se coloca en el eje vertical.
- En los problemas donde interviene el tiempo, por lo general éste es la variable independiente.
- La *caída libre* presenta un comportamiento que corresponde a una *función cuadrática*.
- La gráfica de una *función* del tipo $y = mx + b$ es una línea *recta*.
- Una *función* es *creciente* si su gráfica, leída de izquierda a derecha, es *ascendente*.
- Una *función* es *decreciente* si su gráfica, leída de izquierda a derecha, es *descendente*.
- Una *función puede tener intervalos donde crece y otros donde decrece*.
- Un *punto* es *máximo* si la función pasa de ser creciente a decreciente.
- Un *punto* es *mínimo* si la función pasa de ser decreciente a creciente.
- Un *máximo absoluto* y un *mínimo absoluto* ocurren cuando la *ordenada* es la *mayor* o la *menor*, respectivamente, de todos los puntos del dominio.

3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

En lecciones anteriores se estudió la interpretación gráfica que modela diferentes situaciones o fenómenos reales. La experiencia nos indica que estas situaciones presentan aprendizajes a veces no esperados y contraponen nuestras ideas previas con los conocimientos por descubrir. En esta lección continuaremos el estudio de estos fenómenos y de algunas características de estas funciones al realizar su gráfica.

IDENTIFICA

El nivel del agua que se alcanza en el recipiente depende del tiempo que el grifo está goteando, como puedes observar en la tabla siguiente:

Tiempo (min)	Nivel de agua (cm)
0	0
15	10
30	14
45	17
60	20

Tabla 3.18

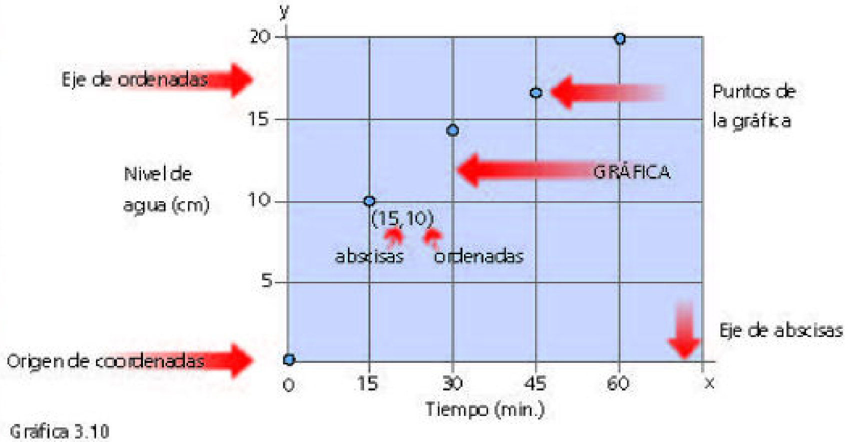
¿Cuáles son las magnitudes en esta relación funcional?

Explora en internet

Visita la página https://prezi.com/ujx6tc7dft3g/demostraciones-de-cinem
En este sitio encontrarás información y demostraciones de cinemática, que es la rama de la Física que estudia el movimiento.
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

CONSTRUYE

Determina los pares de valores tiempo-nivel del agua. Estos pares son las coordenadas cartesianas de puntos del plano.



Gráfica 3.10

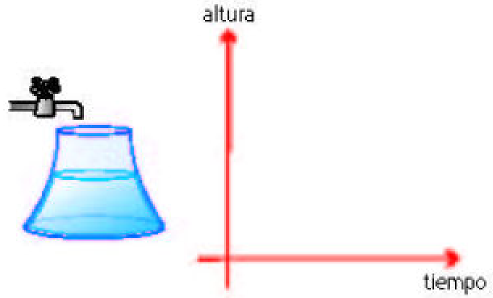
Ten en cuenta

- La variable nivel de agua que toma los valores 0, 10, 14, 17, etcétera, es la variable dependiente, ya que depende de la variable tiempo. Estos valores se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas.
- La variable tiempo de goteo que toma los valores 0, 15, 30, 45, etcétera, es la variable independiente. Estos valores se representan en el eje horizontal o de las abscisas.

DECIDE

Reflexiona lo estudiado anteriormente y responde lo siguiente:

1. La gráfica muestra la variación de la altura del nivel de agua cuando el recipiente se llena con un caudal constante. Traza a mano alzada su forma en el siguiente plano cartesiano.



Ten en cuenta

La gráfica nos da una idea global de la relación de dependencia que existe entre ambas magnitudes.

2. Esboza la forma de las gráficas para los siguientes recipientes.

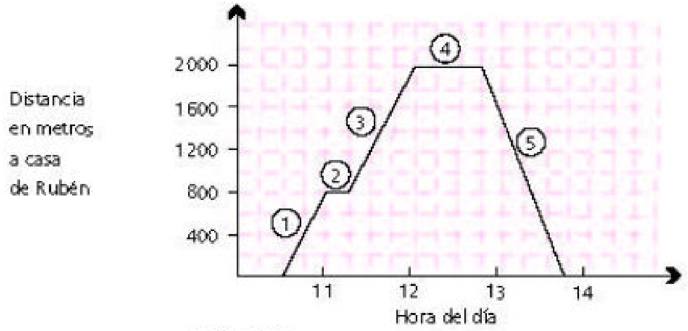
COMUNICA

Forma equipo con dos o tres compañeros y propongan otros problemas referentes a la variación de cantidades, elaboren las tablas para registrar los valores y representen gráficamente cada una. Expongan su trabajo al grupo.

IDENTIFICA

La gráfica representa la siguiente situación:

"Rubén sale de su casa, llega a casa de Andrea y la espera un rato. Se dirigen al parque, donde toman un descanso. Finalmente, vuelven juntos a casa de Rubén".



Gráfica 3.11

Una forma de interpretar la gráfica sería la siguiente:

- Rubén sale de su casa a las 10:30 h y tarda 30 minutos en llegar a casa de Andrea, que está a 800 m de distancia (recorrido 1).
- Rubén espera a Andrea 15 minutos (recorrido 2).
- Pasean durante 45 minutos, recorriendo 1 200 metros (tramo 3).
- Descansan en el parque 45 minutos, mientras toman un refresco (tramo horizontal 4).
- A las 12:45 h deciden volver a casa de Rubén, empleando una hora en hacer el recorrido.

CONSTRUYE

De acuerdo con la información anterior, responde lo siguiente.

1. Escribe tu interpretación y preséntala al grupo para tomar decisiones y establecer una puesta en común sobre lo que dice la gráfica.

Ten en cuenta

Para representar gráficamente una función se forma una tabla de valores y se simbolizan los pares de valores de la tabla con puntos sobre el plano cartesiano. Es importante observar si tiene sentido unir los puntos obtenidos.

IDENTIFICA

En el escaparate de una tienda de fotografía han puesto un anuncio con los precios de revelado según el número de fotos.

¿Cómo es la variación entre las cantidades? Observa la tabla siguiente.

Número de fotos	Precio (pesos)
5	380
10	560
12	632
16	776
20	920
24	1064
30	1280
36	1496

Tabla 3.19

CONSTRUYE

Contesta lo siguiente.

1. Realiza la gráfica de la función dada por esta tabla. ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos? Explica tu respuesta.

IDENTIFICA

La fórmula que expresa el área de un círculo en función de su radio es $A = \pi r^2$.

Se trata de una función dada por una fórmula. Representa gráficamente dicha función.

CONSTRUYE

Responde lo siguiente.

1. Completa la tabla de valores mediante la fórmula; luego elabora la gráfica.

Radio: r	Área: πr^2
1	3.14
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
4.5	
5	
5.5	

Tabla 3.20

2. Comprueba tus resultados con la información proporcionada por la gráfica. El punto (2.7, 22.8906) es parte de esta gráfica. Argumenta tu respuesta.

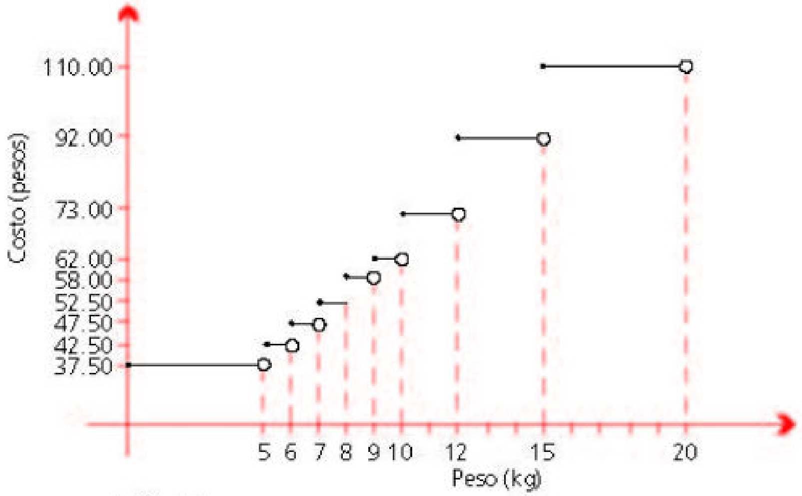
3. Con el estudio de la relación funcional previo a esta lección, puedes encontrar ejemplos de funciones que sean continuas o discontinuas. Escribe varios ejemplos; para ello puedes revisar los bloques anteriores de este libro.

IDENTIFICA

El costo del envío de un paquete por mensajería depende del peso. En la tabla se muestra un ejemplo:

Peso (kg)	Menos de 5	De 5 a menos de 6	De 6 a menos de 7	De 7 a menos de 8	De 8 a menos de 9	De 9 a menos de 10	De 10 a menos de 12	De 12 a menos de 15	De 15 a menos de 20
Costo (pesos)	37.50	42.50	47.50	52.50	58.00	62.00	73.00	92.00	110.00

Tabla 3.21



Gráfica 3.12

¿Qué tipo de función se representa en la gráfica?

CONSTRUYE

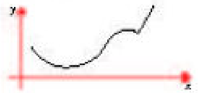
Analiza los datos anteriores y contesta las preguntas siguientes.

1. ¿El costo es constante para pesos menores a 5 kg? Explica tu respuesta.
2. ¿Cuesta lo mismo mandar un paquete de 1.5 kg que uno de 3 kg?
3. ¿Cuesta lo mismo mandar un paquete de 4.9 kg que uno de 5 kg? Explica lo que sucede en la gráfica.
4. ¿Qué sucede en la función en los puntos $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$ y $x = 15$? Explica.

Algo esencial

Función continua

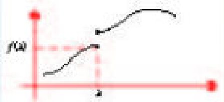
La gráfica en un intervalo puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.



Continuidad significa que a pequeñas variaciones de x corresponden pequeñas variaciones de y.

Función discontinua

La gráfica salta, presenta una rotura en a.



Decimos que "f es discontinua en a" o que a es un punto de discontinuidad de f. Una mínima variación a la derecha de a provoca un salto.

COMUNICA

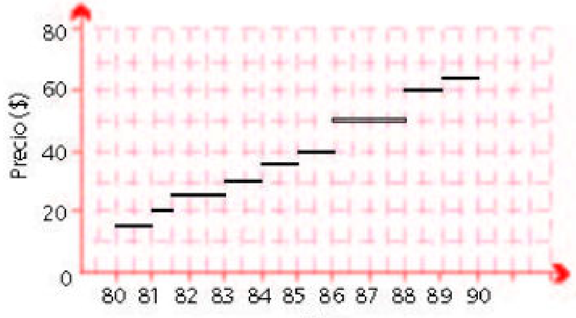
Comenta en el grupo las dificultades que encontraste para explicar lo que pasa en diferentes pesos y costos, con base en lo que se puede leer en la gráfica anterior. Realiza con tus compañeros un consenso de sus respuestas y escribe las conclusiones que obtengan.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

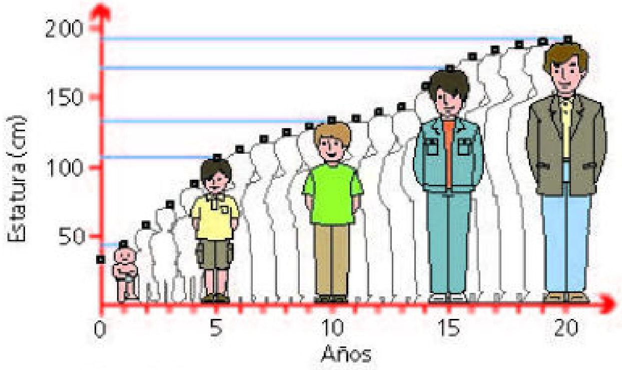
Forma un equipo con tus compañeros para explorar las siguientes gráficas. ¿Qué tipo de funciones representan?

1. Representa la evolución del precio del pasaje de un recorrido en camión del D.F. al estado de Hidalgo de 1980 a 1990.



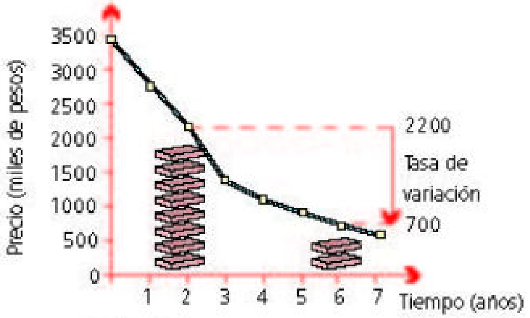
Gráfica 3.13

2. Muestra el crecimiento de un varón desde su nacimiento hasta los 20 años.



Gráfica 3.14

3. La tasa de variación de 2 a 6 años nos indica que hay una variación en el precio de 1 500 miles de pesos.



Gráfica 3.15

Resumiendo

En esta lección aprendiste a interpretar cuando las cantidades de las situaciones de movimiento suben, bajan o se mantienen estables y si el aumento o disminución sucede de manera rápida o lenta.

Además comprendiste que las gráficas formadas por secciones rectas y curvas resultan de gran utilidad en fenómenos en los cuales el movimiento cambia repentinamente, como es el caso de los desplazamientos de un automóvil o los cambios climáticos de una región.

Estas gráficas representan dos tipos de funciones:

1. *Función continua* en la que a pequeñas variaciones de x corresponden pequeñas variaciones de y.
2. *Función discontinua* en la que una mínima variación de x, hacia la izquierda o hacia la derecha, provoca un salto.

Nociones de probabilidad

3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

En la vida diaria ocurren a nuestro alrededor numerosas situaciones que no tienen relación aparente entre sí. Una persona sale con cierto retraso a su trabajo y debe decidir si abordará el transporte público o tomará un taxi. No obstante, una vez instalado en el transporte de su elección, deberá decidir entre leer el diario que acaba de comprar, repasar los papeles que lleva a la oficina o simplemente mirar por la ventanilla el paso de las otras personas. La elección de leer el diario es independiente de si tomó taxi o no.

Explora en internet

Visita la página http://tutormatematicas.com/ALG-m/Probabilidad_eventos_dependientes_independientes_multiplicar_dividir.html

Esta página muestra cómo analizar la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos en diferentes circunstancias. Si deseas conocer todo el contenido da clic en la pestaña "Haga Clic Para Empezar". Si deseas concentrarte en el contenido de la presente lección, identifica las pestañas con los temas tratados en el tutorial, después da clic en "Multiplicación de Probabilidades" para que puedas ver los ejemplos.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Una persona decide visitar a un amigo en otra ciudad, pero para ello necesita que le adelanten el pago de su quincena y que el día de su partida haya boletos disponibles. Los sucesos son independientes, pero se requiere la ocurrencia de ambos para que este individuo pueda concretar sus planes.

En situaciones donde se presentan eventos independientes, es posible realizar un análisis que permita establecer la probabilidad de ocurrencia de ambos, para lo cual existe una regla que estudiarás en esta lección.

IDENTIFICA

Un evento es una situación cualquiera que se puede presentar. Analicemos el problema de la alimentación; éste es un evento que preocupa a todas las naciones, pues constituye uno de los factores clave en el desarrollo de un país, siendo gran parte de la solución los productos que se cosechan en el campo.

En nuestro país hay grandes extensiones agrícolas con cultivos diversos, que van desde el maíz hasta los árboles frutales, dependiendo de factores como el clima y la altitud.

Sin embargo, todo cultivo requiere de agua y muchas tierras, al carecer de sistemas de irrigación, se vuelven dependientes de la lluvia para poder producir buenas cosechas.

El servicio meteorológico nacional es la institución encargada de realizar pronósticos referentes al clima, los cuales se elaboran partiendo de información obtenida por los investigadores. Dicho pronóstico, a final de cuentas, es una *probabilidad* de ocurrencia del evento llamado "lluvia".

Analiza la siguiente tabla, donde se pronostica la probabilidad de lluvias en los diferentes estados de la República para el mes de diciembre de 2012.

Sección d. Pronóstico de lluvias máximas en milímetros acumulados en 24 horas o intensidad de la lluvia en una hora con validez de las 09 horas del día 20 a las 09 horas del día 21 de diciembre de 2012

Acumulada en 24 h	Acumulada en una hora	Equivalencia con el rango y el tipo de precipitación esperada	Estados
Más de 150 mm	Más de 60.0 mm	Tormentas de intensas a torrenciales	--
70 a 150 mm	Más de 60.0 mm	Tormentas de muy fuertes a intensas	--
50 a 70 mm	30.1 a 60.0 mm	Intervalos de chubascos con tormentas muy fuertes	Chiapas y Tabasco.
20 a 50 mm	15.1 a 30.0 mm	Intervalos de chubascos con tormentas fuertes	Veracruz.
5 a 20 mm	2.1 a 15.0 mm	Lluvia moderada con chubascos aislados	Campeche, Quintana Roo, Tamaulipas y Yucatán.
0.1 a 5 mm	Menos de 2.0 mm	Lluvias de escasas a ligeras	Chihuahua, Coahuila, Guanajuato, Guerrero, Hidalgo, Nuevo León, Oaxaca, Puebla, San Luis Potosí, Tlaxcala y Zacatecas.

Tabla 3.22

Fuente: http://smn.cna.gob.mx/boletin/mcs/mcs09a.html

De acuerdo con la tabla, en ese mes y ese año específicos, ¿cuáles fueron los estados con mayor probabilidad de lluvias?

Ahora considera que muchos agricultores recurren a préstamos de diversas instituciones con el fin de poder sembrar y cosechar. Los trámites para obtener este financiamiento están sujetos a diversos factores, por lo que también se puede hablar de la probabilidad de obtenerlo, de no obtenerlo o de conseguir una cantidad menor a la solicitada.

Considerando únicamente estas dos variables, las lluvias y el crédito, podríamos formular la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que un campesino obtenga un crédito y que su parcela reciba la cantidad de lluvia adecuada?

Si la institución crediticia toma en cuenta la probabilidad de lluvia para conceder o denegar el crédito, un evento depende del otro; pero si considera otros factores que no tengan que ver con la probabilidad de lluvia en la región donde trabaja el campesino, entonces estamos ante dos eventos independientes, la ocurrencia de uno no afecta a la ocurrencia del otro.

CONSTRUYE

Tomando como referencia el ejemplo anterior, identifica una situación de vida en la cual se presente la concurrencia de dos eventos independientes.

1. Compara tu propuesta con la de tus compañeros.
2. Analicen si las propuestas efectivamente contemplan dos eventos.
3. Determinen si los dos eventos son dependientes o independientes.

DECIDE

Con ayuda de su profesor, elijan en el grupo dos propuestas que cumplan el requisito de presentar dos eventos independientes. Responde en tu cuaderno a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se denomina a cada uno de los eventos? En el ejemplo anterior fueron "probabilidad de lluvia" y "probabilidad de obtener un préstamo".
2. ¿Por qué se puede afirmar que son eventos independientes? Justifica tu respuesta.
3. ¿Hay alguna situación posible en la cual los eventos dejaran de ser independientes uno de otro?
4. ¿Cómo afectaría esto al cálculo de probabilidad?

COMUNICA

Con ayuda de tu profesor expón tus ideas al grupo, escuchando con respeto y comparando las respuestas de los otros compañeros con las tuyas.

IDENTIFICA

En un juego de feria uno de los asistentes se detiene en un puesto. Quien lo atiende hace girar una ruleta con colores: verde, azul, rojo y amarillo. Mientras la ruleta gira, el hombre lanza un enorme dado de juguete. Para ganar un premio es necesario elegir un color de la ruleta y un número del dado.

1. ¿Cuántos colores hay en la ruleta?
2. ¿Cuántos números hay en el dado?
3. ¿Qué se requiere hacer para ganar un premio?

Ten en cuenta

Para obtener la probabilidad de ganar en la ruleta y el dado a la vez, es necesario multiplicar ambas probabilidades:

$$Probabilidad_{(ruleta\ y\ dado)} = Probabilidad_{(ruleta)} \times Probabilidad_{(dado)}$$

CONSTRUYE

De manera individual, responde a las preguntas.

1. Si hay cuatro colores y puedes elegir uno, ¿cuál es la probabilidad de éxito en la ruleta?
2. Si hay seis números en el dado y puedes elegir uno, ¿cuál es la probabilidad de éxito con el dado?
3. Calcula la probabilidad de ganar el juego:

$$P_{ganar} = - \times - = -$$

DECIDE

Reúnete con un compañero y analicen la siguiente situación.

En el juego de la feria le dan oportunidad al jugador de elegir entre dos opciones.

Opción 1: escoger un color de la ruleta y tres números del dado.

Opción 2: escoger dos colores de la ruleta y dos números del dado.

1. ¿Cuál de las dos le conviene más? ¿Por qué razón?
2. Sin hacer ningún tipo de análisis decidan cuál opción creen que sea más conveniente para el jugador.
3. Hagan el cálculo de probabilidades y comparen su respuesta con la que dieron en el punto anterior.

Algo esencial

Si llamamos a la ruleta evento A y al dado evento B, podemos generalizar la situación de la siguiente manera:

$$P_{(A\ y\ B)} = P_{(A)} \times P_{(B)}$$

Ésta es la *regla del producto* para el cálculo de probabilidades de eventos independientes. Si tenemos más eventos independientes también se incluyen en la fórmula:

$$P_{(A\ y\ B\ y\ C)} = P_{(A)} \times P_{(B)} \times P_{(C)}$$

COMUNICA

Comparte tu respuesta con otros compañeros, si obtuvieron resultados diferentes revisen qué procedimiento siguieron y determinen cuál es el correcto con ayuda de su profesor.

¿Consideran de utilidad saber calcular la probabilidad de dos eventos independientes? Registren en el cuaderno sus conclusiones.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. En una caja se colocan cuatro canicas rojas y tres blancas. Lucía extrae una canica y la regresa a la caja, para después extraer otra. ¿Qué probabilidad hay de que las dos sean blancas?

2. A la misma caja se añaden siete canicas verdes. Nuevamente Lucía extrae una canica y la regresa, después otra y otra más, siempre regresándolas a la caja. ¿Qué probabilidad hay de que haya sacado únicamente canicas rojas?

3. ¿Qué sucede si Lucía no regresa las canicas a la caja? Con las mismas canicas, cuatro rojas, tres blancas y siete verdes, extrae una pero no la regresa, después otra y tampoco la regresa, y por último una tercera. ¿Qué probabilidad hay ahora de que todas sean rojas? ¿Qué tipo de evento es, dependiente o independiente?

Profundizando

Cuando se presentan ciertos eventos, por ejemplo extraer canicas de una caja, existe la posibilidad de regresar la canica después de ver el color o de no hacerlo, es decir, se puede cambiar o no.

Cuando la canica se reemplaza, la siguiente extracción es un *evento independiente* con respecto al primero, lo que haya salido la primera vez no afecta en nada lo que sucederá a continuación.

Si la canica no se sustituye, disminuye el número de canicas de ese color y también disminuye el total de canicas, la probabilidad de la siguiente extracción se verá afectada por estos cambios; por tanto será un *evento dependiente* del anterior.

De esta manera la probabilidad de que ocurra el evento A y el evento B no será la misma para un evento dependiente que para uno independiente, aunque en ambos casos se aplique la regla del producto.

Resumiendo

La *regla del producto* se aplica cuando se quiere determinar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos que no sean excluyentes o complementarios, en cuyo caso se aplica la regla de la suma.

La regla del producto especifica:

$$P_{(A\ y\ B\ y\ C)} = P_{(A)} \times P_{(B)} \times P_{(C)}$$

Esta regla aplica lo mismo para eventos dependientes o independientes.

Dos o más *eventos* son *independientes* cuando la probabilidad de ocurrencia de cada uno no afecta a la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los demás eventos.

★ ★ INFORMATIVO MATEMÁTICO ★ ★

Ciencia

Salto de altura

El salto de altura es un desplazamiento debido a un impulso horizontal uniforme y un movimiento vertical uniforme, retardado al principio y acelerado después por el efecto de la fuerza gravitatoria (igual que en los proyectiles). Por tanto, la trayectoria que describe el cuerpo del atleta debe formar una parábola.

Cuando el atleta está saltando, su cuerpo es un sistema autónomo y por la tercera ley de Newton, si los brazos y los pies se desplazan en exceso hacia arriba, entonces el resto del cuerpo se desplazaría hacia abajo.

Por lo tanto, el atleta debe buscar que la altura máxima en los pies, brazos, cabeza y pubis sea la misma y todos tengan excelente coordinación.

Historia

Tales de Mileto (624 a.n.e.)

Tales de Mileto es uno de los "siete sabios" de la antigüedad; se destacó tanto en filosofía como en matemáticas. Se le atribuyen las primeras "demostraciones" de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico.

Se cuentan muchas anécdotas acerca de Tales. Según Plutarco, era el típico sabio distraído, concentrado sólo en sus investigaciones astronómicas (se dice que predijo el eclipse solar del año 585 a.n.e.). Se cuenta que en una ocasión el famoso sabio cayó en un pozo por mirar al cielo y una anciana le dijo: "pretendes observar las estrellas y ni siquiera ves lo que tienes a tus pies".

Cuando le preguntaron a Tales qué recompensa quería por sus descubrimientos, contestó: "me consideraría bien recompensado si los demás no se atribuyeran mis hallazgos, sino que reconocieran que son míos".

Caso curioso

Dos automóviles viajan con velocidad constante en una carretera (imagina que la carretera es una línea recta). El automóvil A viaja a 110 km/h y el automóvil B a 100 km/h. Determina el lugar de encuentro si:

a) El automóvil A parte a las 7:00 a.m. y el automóvil B 10 minutos después desde el mismo punto de partida.

b) Los automóviles se encuentran separados a una distancia de 200 km y viajan en sentido contrario (uno hacia el otro). Si parten en el mismo instante, ¿en qué punto se encontrarán?

Evaluación tipo PISA

La ecuación cuadrática

3.1 Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se calculan aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde la expresión $b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación.

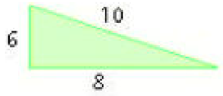
Nivel 1) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones.
¿Cuál de estas tres ecuaciones tiene dos soluciones?
a) $9x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$
c) $2x^2 + 2x + 5 = 0$

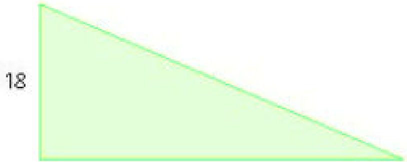
Nivel 2) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una solución.
Escribe una ecuación cuadrática que cumpla con la condición anterior.

Nivel 3) Determina para qué valores del término independiente, la ecuación $2x^2 + 3x + k = 0$ tiene o no solución.

Ampliando un triángulo

3.2 Un triángulo tiene por lados 6 cm, 8 cm y 10 cm. Se amplía en una fotocopiadora de modo que el lado correspondiente al pequeño en la copia mide 18 cm.





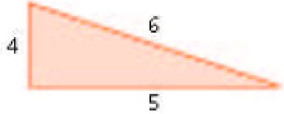
Nivel 1) Realiza un dibujo que represente esta situación, utiliza tus escuadras para tener la mayor precisión posible.

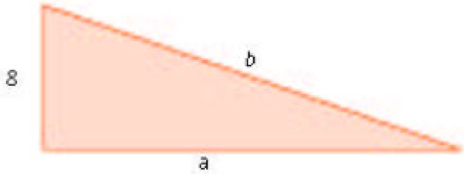
Nivel 2) Determina el valor de los otros dos lados del triángulo.

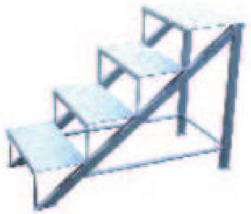
Nivel 3) Da la medida de otro triángulo más pequeño que sea semejante al triángulo original y trázalo con la mayor precisión posible.

La semejanza en la escalera

3.3 Las siguientes parejas de triángulos son semejantes: 4, 5, 6 y 8, a, b.







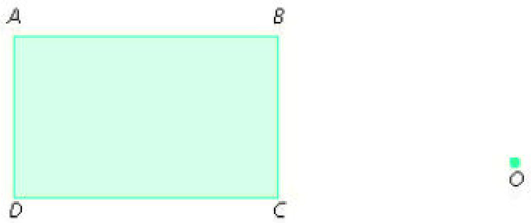
Nivel 1) Calcula la razón de semejanza.

Nivel 2) Determina las medidas de los lados desconocidos en centímetros.

Nivel 3) La figura de la derecha representa una escalera. ¿Cuánto mide el travesaño de la escalera denotado con la letra x?

La homotecia

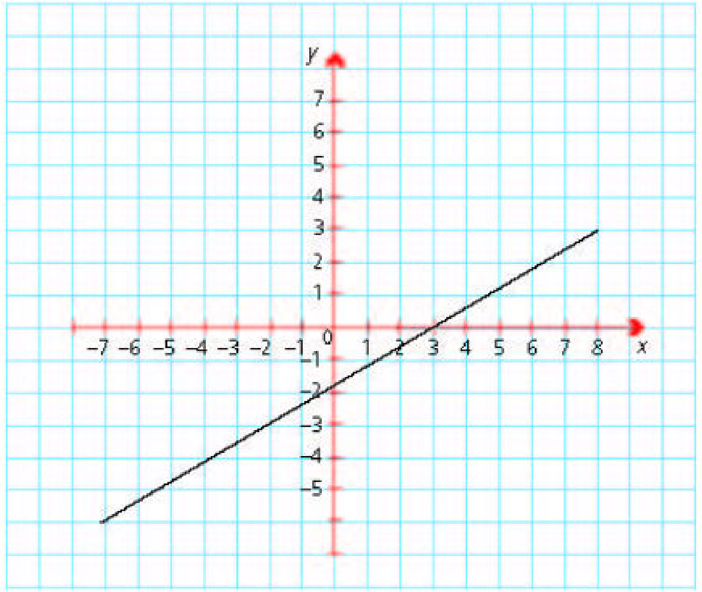
3.4 Observa la siguiente figura:



Nivel 1) Construye la figura homotética de ella, con razón de homotecia -2.
Nivel 2) Ahora construye la figura con una razón de homotecia de 3.
Nivel 3) Escribe las propiedades que permanecen invariantes.

La gráfica de una función

3.5 Observa la siguiente gráfica.



Gráfica 3.16

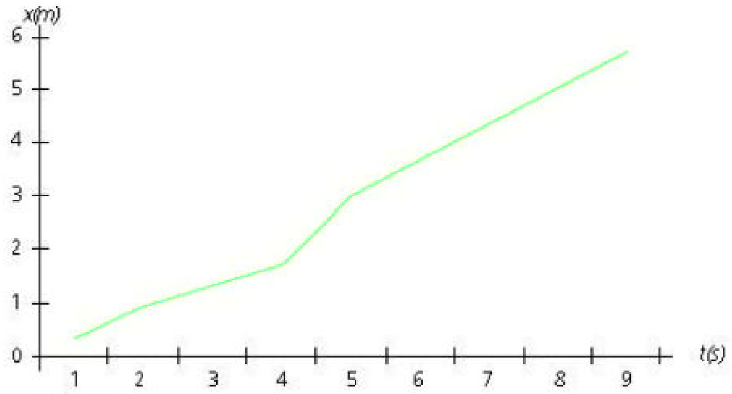
Nivel 1) Calcula $f(0)$ y $f(5)$.
Nivel 2) Calcula x de modo que $f(x) = 0$.
Nivel 3) Determina el dominio e imagen de f.

Velocidad en el ciclismo

3.6 Durante el Tour de Francia, la velocidad que alcanza un ciclista es uniforme, pero, según su estrategia de competencia, en un instante varía, aumenta mucho su rapidez, posteriormente la disminuye y luego mantiene un movimiento uniforme. La tabla y la gráfica siguientes muestran esos cambios:

t (s)	x (m)
1	0.3
2	0.9
3	1.3
4	1.7
5	3
6	3.6
7	4.3
8	5
9	5.7

Tabla 3.23



Gráfica 3.17

Nivel 1) ¿Qué tipo de función representa la gráfica?
Nivel 2) ¿Cómo es el movimiento entre los segundos 4 y 6?
Nivel 3) ¿Qué sucede en la función en los segundos $x = 7$, $x = 8$ y $x = 9$?

La probabilidad y las canicas

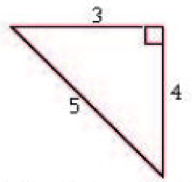
3.7 En una caja se depositan dos canicas rojas, una blanca y tres negras. Luis mete la mano y saca una canica, la regresa a la caja y vuelve a sacar otra.
Nivel 1) ¿Qué probabilidad tiene Luis de sacar canica roja en las dos ocasiones?
Nivel 2) ¿Qué probabilidad tiene Luis de sacar canica negra en una de las dos ocasiones?
Nivel 3) Si en la caja hubiera cuatro canicas rojas, cuatro blancas y tres negras, y Luis extrae una canica pero no la regresa, después otra y tampoco la regresa, y por último una tercera que tampoco se regresa. ¿Qué tipo de eventos son, dependientes o independientes? Y ¿cuál es la probabilidad de que la primera canica sea blanca; la segunda negra, y la tercera blanca?

Autoevaluación

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

REALIZA

1. Realiza las siguientes ecuaciones:
   a) $2x2 - x - 1 = 0$
   b) $-x2 + 4x - 3 = 0$
2. Construye la figura homotética del siguiente triángulo con una razón de homotecia de +7.



3. En un tianguis de venta de automóviles, hay cuatro automóviles de la marca *A*, de los cuales dos son negros; y seis automóviles de la marca *B* de los cuales cuatro son negros.

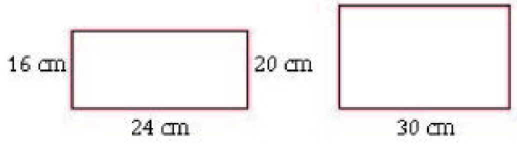
   Calcula la probabilidad de que al elegir un coche al azar:
   a) Sea de la marca *A*.
   b) Sea negro.
   c) Sea negro y de la marca *A*.
   d) Sea de la marca *B* pero no negro.
   e) Sabiendo que es negro, sea de la marca *B*.
   f) Sabiendo que es de la marca *A* sea negro.

APLICA

1. Usa la fórmula general para determinar la solución de estas ecuaciones.
   a) $(x - 2)(x + 1) = 0$
   b) $x^2 + 2x = 15$
2. Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 cm. Construye otro triángulo semejante con razón de 0.5.
3. Una función cuadrática pasa por los puntos (–1 , 3), (–5 , 3) escribe la ecuación de la función.

REFLEXIONA

1. ¿Qué valor debe tener *c* para que la solución de la ecuación $9x^2 - 30x + c = 0$, sea única?
2. Dados estos rectángulos:



   a) ¿Son semejantes?
   b) ¿Cuál es la razón de semejanza?
   c) Determina las medidas de otros rectángulos que sean semejantes a ellos.
3. La distancia (*d*) de frenado en kilómetros de un automóvil que va a una velocidad (*v*) y desacelera (*a*) está dada por:

$$d = \frac{v^2}{2a}$$

   ¿A qué velocidad iba un auto que frenando a 500 Km/h^2, recorrió 100 m antes de detenerse por completo?
4. La tabla muestra algunos puntos por donde pasa la función cuadrática

x	2	6	5	
y	0		–3	–3

   a) Realiza la gráfica.
   b) Si la gráfica de esta función cuadrática tiene su vértice en el punto (4 , –4), ¿cuáles son los valores faltantes en la tabla?

Glosario

SEMEJANZA. Calidad de dos o más figuras cuando sus lados y ángulos son iguales.

TEOREMA DE TALES. Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

HOMOTECIA. Transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor.

FUNCIONES CUADRÁTICAS. Aquella que puede escribirse de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde *a*, *b* y *c* son números reales cualquiera y *a* es distinto de cero.

CONGRUENCIA. De la misma forma y tamaño. Dos figuras son congruentes si se pueden voltear, girar o rotar una y continúan correspondiendo exactamente una con la otra.

TRIÁNGULOS CONGRUENTES. Dos triángulos son congruentes si hay una correspondencia entre los vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA. Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes se denominan criterios de congruencia, los cuales son:

- Criterio LAL: Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados tienen la misma longitud de sus homólogos, y el ángulo comprendido entre ellos tiene la misma medida de su homólogo.
- Criterio ALA: Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- Criterio LLL: Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes.
- Criterio LLA: Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Bloque 4

El primer paso para resolver un problema de manera eficaz es analizarlo e identificar los conceptos numéricos que se ajustan a las condiciones del mismo. Pero ésta es sólo una parte de la etapa representativa de la solución de problemas, la descripción conceptual de lo que se conoce. La solución de problemas también requiere la inferencia de nueva información que proporcione otra perspectiva.

En las matemáticas, esta inferencia se apoya invariablemente en técnicas sistemáticas para representar y manipular información y en problemas cuantitativos, en procedimientos para calcular los resultados.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

Utilices en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.

Resuelvas problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Calcules y **expliques** el significado del rango y la desviación media.

Ideas clave

Realiza inferencias y deducciones y relaciona informaciones diversas relativas a la vida cotidiana, valorando las habilidades matemáticas para afrontar la situación que requiera su empleo.

Utiliza la calculadora para resolver problemas valorando críticamente su utilidad y la de otros instrumentos, opinando sobre sus peculiaridades y características.

Relaciona y **sitúa** los elementos y símbolos que determinan un problema siendo perseverante y claro, aceptando las diferentes estrategias planteadas por los compañeros.

Dosificación Bloque 4

Semana	Tema	Subtema	Aprendizajes esperados
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico			
24	Patrones y ecuaciones	4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	1. Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
Eje: Forma, espacio y medida			
25	Figuras y cuerpos	4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	
26	Medida	4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	
27		4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	
28		4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	2. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Eje: Manejo de la información			
29	Proporcionalidad y funciones	4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	
30	Análisis y representación de datos	4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	3. Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.
31	Evaluación tipo PISA		
31	Autoevaluación		

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN
Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Repasa tus conocimientos

Contesta en tu cuaderno.

1. ¿Qué término continúa en la siguiente sucesión?
   12 ; 48 ; 16 ; 32 ; 64 ; 12 ; 82 ; ...
2. ¿Cuándo un triángulo rectángulo gira sobre un cateto qué forma geométrica describe?
3. Si se tiene la recta $y = 4x + 31$, ¿cuál es la ecuación de una recta paralela que pase por el origen?
4. La siguiente afirmación es falsa o verdadera: "La diferencia de dos ángulos obtusos es un ángulo agudo".
5. En los autobuses urbanos de la ciudad de Puebla el precio del pasaje por persona es 3.25. Si en un día se recaudaron \$396.50, determina la cantidad de pasajeros que viajaron.
6. ¿Cuál es la moda, la media y la mediana de los siguientes datos: 3.5, 4.1, 4.2, 3.8, 4.0, 3.3, 3.9?

Comenta tus respuestas con el grupo y registra tus conclusiones en el cuaderno, de esta manera, al finalizar el estudio de este tema podrás valorar tus avances.

Explora en internet

Visita la página:
http://www.vitutor.com/al/sucesiones/sucContenidos_e.html
En este sitio encontrarás diversos ejercicios interactivos para aprender acerca de las sucesiones.
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Patrones y ecuaciones

4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

IDENTIFICA

Observa la sucesión de figuras que se muestra a continuación y completa la tabla.

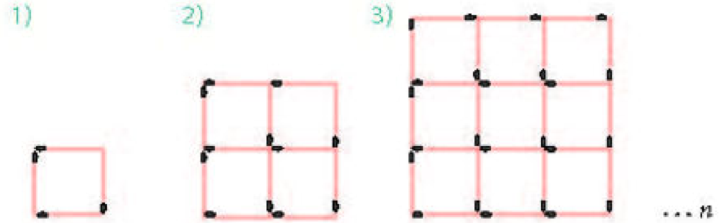


Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	...n
Núm. de cuadrados	1	$2^2 = 4$							

Tabla 4.1

1. ¿Cuántos cuadrados de lado tendrá la figura n-ésima?

Acabamos de ver que la formación de las figuras guarda una regularidad que permite encontrar una fórmula general para cuando la figura ocupa la posición n.

CONSTRUYE

Contesta en tu cuaderno.

1. Encuentra una fórmula que permita calcular la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, utilizando sólo la operación de suma.
   a) Estima el resultado.
   Dos números consecutivos son 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5, etcétera. La diferencia de sus cuadrados es $3^2 - 2^2$, $4^2 - 3^2$, $5^2 - 4^2$, etcétera.
   b) ¿Se puede calcular sólo sumando? Argumenta tu respuesta.

2. Simplificando la situación se obtiene lo siguiente:
   a) $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$
   b) $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
   c) $10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19$
   d) $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$
   e) $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$
   f) Escribe tus observaciones.
3. Descubre alguna regularidad.
   a) $3^2 - 2^2 = 5$, que es $3 + 2 = 1 + 2 + 2 = 1 + 2 \cdot 2$
   b) $4^2 - 3^2 = 7$, que es $4 + 3 = 1 + 3 + 3 = 1 + 2 \cdot 3$
   c) $10^2 - 9^2 = 19$, que es $10 + 9 = 1 + 9 + 9 = 1 + 2 \cdot 9$
   d) Escribe tu propia regla para esta regularidad.
4. Comprueba el resultado para las siguientes diferencias.

$$81^2 - 80^2 \;\begin{cases} \rightarrow 6561 - 6400 = 161 \\ \rightarrow 2 \cdot 80 + 1 = 161 \end{cases}$$

   a) 100 y 101 b) 200 y 199 c) 78 y 79
5. Explica cómo comprobarías que $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ es válida para cualquier número x.

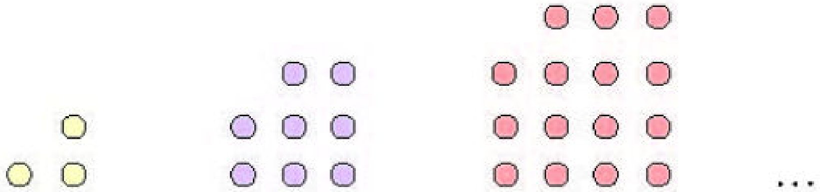
Ten en cuenta

La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual a su suma, que a su vez es igual al doble del número menor más 1. Por tanto, si los números son x y $x + 1$ entonces
$(x + 1)2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde lo que se solicita a continuación.

1. Halla una fórmula que permita calcular la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencien en dos unidades sin tener que elevar al cuadrado. Después, interpreta el resultado.
2. ¿Cuántos puntos tendrá la siguiente figura de la serie?



3. Escribe en lenguaje algebraico:
   a) La edad de Luis dentro de 10 años, si x es su edad actual.
   b) La edad de Ana hace 5 años, si x es su edad actual.
   c) El área de un rectángulo de base x, cuya altura es el triple de la base.

Ten en cuenta

Para resolver un problema:
1. Comprende el enunciado.
2. Comienza por casos particulares.
3. Busca regularidades.
4. Comprueba el resultado.

COMUNICA

Expón ante tus compañeros el método que utilizaste para resolver los ejercicios que se plantearon. Comenta en el grupo las diferencias que hallaste en sus respuestas. Escribe en tu cuaderno la conclusión que obtuvieron.

CONSTRUYE

Con base en lo anterior, contesta en tu cuaderno las actividades siguientes:

1. Explora la secuencia de manera individual y completa la siguiente tabla:

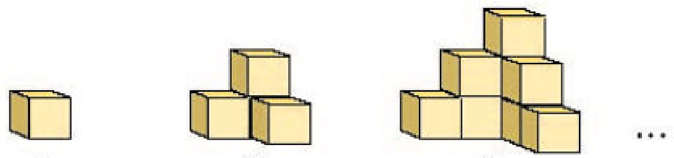
Núm. de figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de cubos	1	4				

Tabla 4.2

2. Forma un equipo con algunos de tus compañeros y contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión? Explica tu procedimiento.
   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión? Argumenta tu respuesta.
   c) Si se sabe que una de las figuras que forma una sucesión tiene 2704 cubos, ¿qué número le corresponde en la sucesión? Explica la estrategia que utilizas para resolver esta cuestión.

IDENTIFICA

Observen la sucesión de figuras que se muestra a continuación.



1 2 3 …

¿Cuántas caras se observan en cada cubo?

CONSTRUYE

Contesta en tu cuaderno.

Explora la siguiente cuestión, donde el próposito es obtener una ecuación cuadrática que dé respuesta al número de caras que se pueden ver en la sucesión de cubos en cualquier posición.

1. En la primera figura se observan tres caras y en la segunda nueve caras. Completa la tabla siguiente:

Núm. de figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de caras	3	9				

Tabla 4.3

2. Ahora forma un equipo con tres de tus compañeros y respondan las siguientes preguntas.
   a) Si se continúa con la construcción de las figuras, ¿cuántas caras sería posible ver en la figura que ocupe el lugar 10? Argumenta tu respuesta.
   b) ¿Qué regularidades observas? Escríbelas.
   c) Completa la tabla y explica qué sucede con las diferencias.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Núm. de caras	3	9	17	27	39					
1a. diferencia	9 – 3 = 6	17 – 9 = 8	27 – 17 = 10	39 – 27 = 12						
2a. diferencia		8 – 6 = 2	10 – 8 = 2							

Tabla 4.4

   d) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión? Pista: ésta es una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c$; para ello explora la ecuación en la siguiente tabla:

Valor de x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ax^2 + bx + c$	$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$						
1a. diferencia	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$	$9a + b$						
2a. diferencia	$2a$	$2a$	$2a$	$2a$						

Tabla 4.5

   e) ¿Qué regularidades descubres en la tabla?
   f) Compara tus resultados con los de la tabla anterior y verifica que se establece el siguiente sistema de ecuaciones:
      $2a = 2$
      $3a + b = 6$
      $a + b + c = 3$
   g) ¿Qué otros sistemas de ecuaciones se pueden establecer? Escríbelos.
   h) Al resolver el sistema de ecuaciones encontrarás los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c$. Escríbelos.
   i) Comprueba que la ecuación funciona para las figuras 1 y 2, así como para cualquier número de figura. ¿Qué número corresponde en la sucesión a la figura en la que es posible ver 124 caras de los cubos que la forman?

3. Observa la combinación de resultados obtenidos en la sucesión generada por el conteo de las caras que son visibles. Se pueden establecer en cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones.

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
De la 2a. diferencia	$2a = 2$	$2a = 2$	
De la 1a. diferencia	$3a + b = 6$	$5a + b = 8$	
De las caras que se ven	$a + b + c = 3$	$4a + 2b + c = 9$	

Tabla 4.6

Completa las ecuaciones para la figura 3.

Resolviendo el sistema de la figura 2.

$2a = 2$, entonces $a = 1$

$5a + b = 8$; $5(1) + b = 8$, entonces $b = 3$

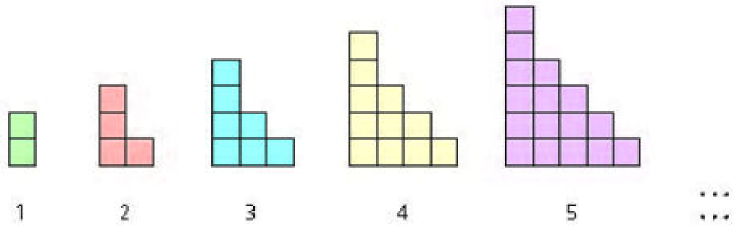
$4a + 2b + c = 9$, $4(1) + 2(3) + c = 9$, entonces $c = -1$

Con esto hemos encontrado los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. La ecuación es:

$x^2 + 3x - 1 = 0$.

Resuelve el sistema de la figura 1.

4. Escribe la fórmula que genera esta secuencia de figuras; para ello completa las siguientes figuras y tabla.



5. Completa la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A (n)	2	4	7	11	16					

Tabla 4.7

A (1) = 2
A (2) = 4
A (3) = 7
A (4) = 11
A (5) = 16

DECIDE

Analiza la información anterior y resuelve las siguientes actividades.

1. En la siguiente tabla se muestra una sucesión de números, así como el lugar que ocupa cada término.

Lugar	1	2	3	4	...	n
Término de la sucesión	2	5	10	17	...	

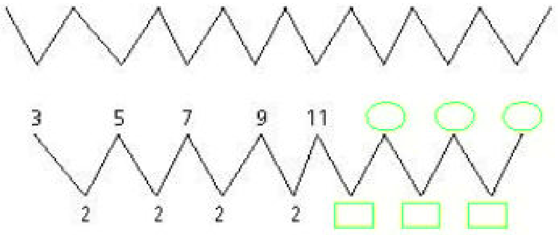
Tabla 4.8

a) Construye la ecuación que permite obtener el número que forma parte de la sucesión.
b) Comprueba la ecuación para algunos lugares.
c) ¿El número 26 forma parte de la sucesión? ¿Qué lugar ocupa?

2. La expresión de segundo grado $n^2 + 3$ es la regla de una sucesión que se muestra en la siguiente tabla. Determina los valores que faltan.

n	1	2	3	4	5	6	10	11	12
$n^2 + 3$	4	7	12	19	28	39			

Tabla 4.9



Observa las cantidades que tienes que sumar para obtener los términos de la sucesión.

3. Determina los primeros términos para las siguientes expresiones.
a) $n^2 + 2n + 1$
b) $2n^2 + 5n - 1$
c) $n^2 - 4$

COMUNICA

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la manera de establecer la regla general de cada sucesión, o bien, si existe otra manera de solucionar las sucesiones. Escribe en tu cuaderno las conclusiones que obtengan.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

1. Determina en cada una de las siguientes sucesiones numéricas los términos que faltan y escribe la expresión que la generaliza. Explica, en cada caso, cómo cambia de un término al siguiente:

a)

1	2	3	4	5	6	7	10	n
3	6	9	16	25				

Tabla 4.10

b)

1	2	3	4	5	6	7	100	n
4	6	8	10					

Tabla 4.11

c)

1	2	3	4	5	6	7	100	n
5	8	11	14					

Tabla 4.12

d)

1	2	3	4	5	6	7	100	n
6	9	12	15					

Tabla 4.13

e)

1	2	3	4	5	6	7	100	n
1	4	9	16					

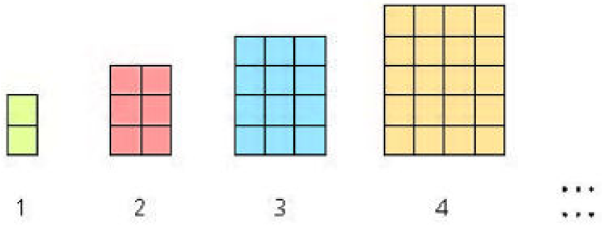
Tabla 4.14

f)

1	2	3	4	5	6	7	100	n
4	16	18						

Tabla 4.15

2. Formen un equipo de tres integrantes y comparen sus resultados. Anoten en su cuaderno los argumentos más relevantes de sus compañeros y expónganlos al grupo.
3. Observa la siguiente secuencia de figuras y representa las tres figuras siguientes.



Completa la siguiente tabla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
A (n)	16	18								

Tabla 4.16

a) ¿Cómo crece la base y la altura en cada una de las figuras anteriores?
b) Existe alguna relación entre la base y la altura en cada figura. Explícalo.
c) Determina la base y la altura de la figura en el lugar n.
d) ¿Cuántos cuadros tiene la figura en la posición n?
e) ¿Cuántos cuadros hay de diferencia entre una figura y la siguiente?
f) ¿Cuántos cuadros tienes que agregar a la figura n para construir la siguiente?

Utiliza la siguiente tabla para ordenar tus resultados.

Base	1	2	3	4	5	6	...	n
Altura	2	3						
Total de cuadritos	2	6						
Agrega	4	6						

Tabla 4.17

g) La fórmula general que describe el área de todos los objetos de la siguiente secuencia es:

A (1) = 2 = 1 + 1 = 1 (2)
A (2) = 6 = 4 + 2 = 2 (3)
A (3) = 12 = 9 + 3 = 3 (4)
A (4) = 20 = 16 + 4 = 4 (5)
A (5) =
A (6) =
A (7) =
A (8) =

4. Si n es cualquier número, entonces $A(n) = n\,(n + 1) = n^2 + n$.
Verifica la fórmula; calcula:
$A(3)$; $A(10)$; $A(100) =$

5. Forma un equipo para calcular $A(n+1)$.

Resumiendo

Como recordarás, la secuencia es un conjunto de números o figuras cuyo orden sigue una regla que indica cómo calcular el valor de cada término.

La expresión algebraica que corresponde a una sucesión se encuentra a partir de la diferencia entre dos términos consecutivos.

Con las diferencias se descubren varias características de las sucesiones numéricas, como el tipo de expresiones algebraicas que les corresponden: lineales, cuadráticas o cúbicas.

Si la expresión general de una sucesión es cuadrática, entonces se pueden observar regularidades como las siguientes:

a) Las diferencias en el nivel 1 son diferentes entre sí.
b) Las diferencias del nivel 2 son iguales a una constante diferente de 0, esto indica que la expresión algebraica que representa una sucesión es cuadrática: $an^2 + bn + c$, donde n representa el lugar del término. Para encontrar el valor de los coeficientes a, b y c de esta expresión se puede usar el método de las diferencias.
c) Si la expresión general es cuadrática, la constante del nivel 2 de las diferencias es el doble del coeficiente del término cuadrático de la expresión.
En el método de las diferencias se plantean tres ecuaciones para encontrar el valor de a, b y c, y se realiza lo siguiente:
1o. Se representa la sucesión numérica: 3, 7, 13, 21.
2o. Se calculan las primeras y segundas diferencias. Por ejemplo en el primer nivel: $7 - 3 = 4$, $13 - 7 = 6$, $21 - 13 = 8$ y en el segundo nivel: $6 - 4 = 2$ y $8 - 6 = 2$.
3o. Se obtiene una expresión para cada posición al sustituir el valor de n en la expresión general $an^2 + bn + c$, donde n representa el lugar que ocupa cada término en la sucesión.
4o. Se realizan las primeras diferencias de ecuaciones generales.
5o. Se realizan las segundas diferencias de ecuaciones que resultaron del primer nivel.

Explora en internet

Visita la página http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m1_geometria.php

Esta página no es interactiva pero encontrarás diferentes actividades de geometría, construidas por expertos en la asignatura de Física, que clasifican estas actividades en apuntes y ejercicios; selecciona los temas de nuestro interés para este apartado: conos y esferas.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

6o. Se combinan, considerando de abajo hacia arriba, los resultados para establecer los sistemas de ecuaciones.

7o. Se resuelve uno de los sistemas de tres ecuaciones que resulten. Con la primera ecuación se obtiene el valor de a; sustituyendo este valor en la segunda ecuación se calcula el valor de b, y sustituyendo los valores conocidos de a y b en la tercera ecuación se encuentra el valor de c.

8o. Se sustituyen los valores de a, b y c en la expresión general cuadrática $(an^2 + bn + c)$ para obtener la expresión algebraica de la sucesión numérica.

Figuras y cuerpos

4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Para interpretar y crear el mundo actual pletórico de imágenes no basta con identificar las semejanzas y diferencias, también es necesario analizarlas. Esto nos lleva a investigar la manera en que se construyen diferentes cuerpos geométricos a partir de otros y a identificar sus propiedades.

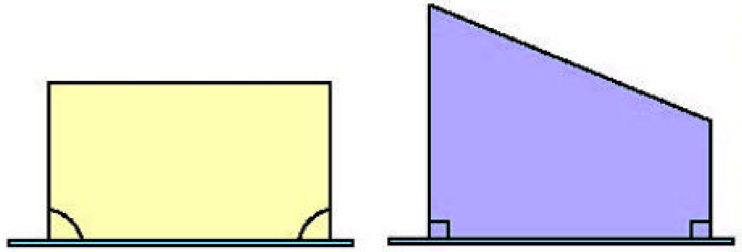
Competencia matemática en acción

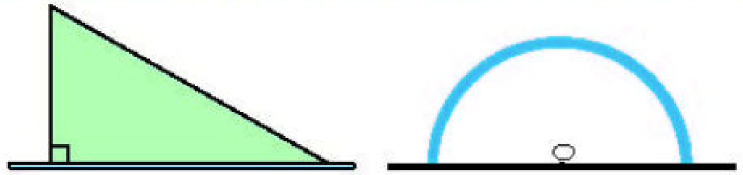
Manejo de técnicas con eficiencia

Cuerpos de revolución

En equipo realicen la siguiente actividad. Escuchen las opiniones de sus compañeros para organizar el trabajo.

1. Para realizar esta actividad requieren de lo siguiente:
   a) En una cartulina tracen un rectángulo, un triángulo rectángulo, un trapecio rectángulo y un semicírculo. Recorten cada una.
   b) Utilizando una regla, una vara recta o un palito de madera como base, peguen cada figura como se muestra a continuación.

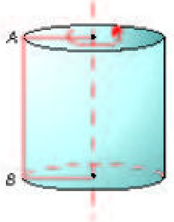




2. Coloquen el palo o la vara en posición vertical, tomen un extremo y denle vueltas para que gire lo más rápido posible.
   a) ¿Qué forma se aprecia al girar cada una de las figuras?
      Con el rectángulo:
      Con el triángulo:
      Con el trapecio:
      Con el semicírculo:
   b) ¿Al cambiar el tamaño de las figuras se obtendrán otras formas? Justifíquenlo.
   c) ¿Qué objetos tienen las formas que descubrieron?
3. Escriban un resumen en el que expliquen cómo se obtiene cada uno de los cuerpos redondos, empleando dibujos.
4. A partir de lo anterior discutan en grupo: ¿Cuáles son las características de cada cuerpo?
5. Indiquen en sus dibujos cuáles son:
   - La superficie lateral.
   - La base o bases.
   - La altura.
6. Otro de los elementos más importantes en un cuerpo de revolución es la generatriz.

En el cilindro:

La generatriz es el lado de la figura que al girar une puntos de las dos circunferencias de las bases y es perpendicular a ellas.

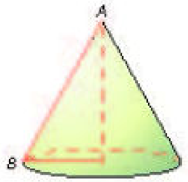


$\overline{AB}$ es la generatriz

Puede ser cualquier segmento que una perpendicularmente las dos bases circulares.

En el cono:

La generatriz es el lado de la figura que al girar une un punto de la base circular con el vértice.



$\overline{AB}$ es la generatriz

Puede ser cualquier segmento que una el vértice con la base circular.

¿Qué relación existe en cada una de estas figuras entre su generatriz y su altura?

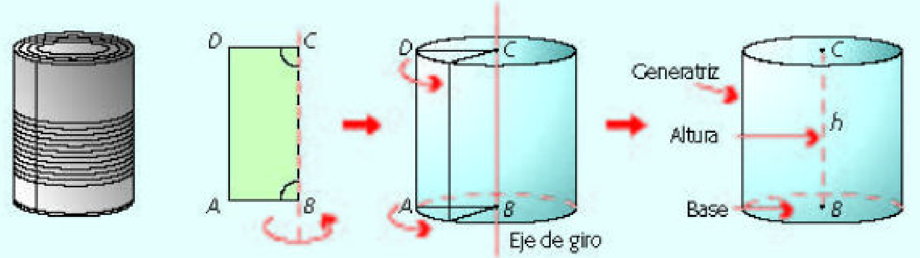
7. Si emplean la traslación de un círculo en posición perpendicular a un eje, ¿qué forma se obtendrá?

Ten en cuenta

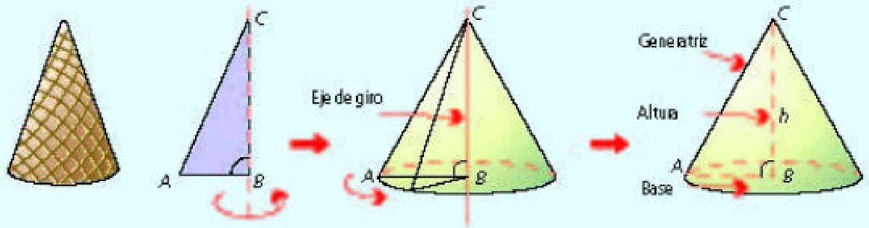
Un cuerpo redondo se obtiene al girar un recinto plano alrededor de un eje situado en el mismo plano, de modo que cada punto del recinto describe una circunferencia al dar una vuelta completa.

Algo esencial

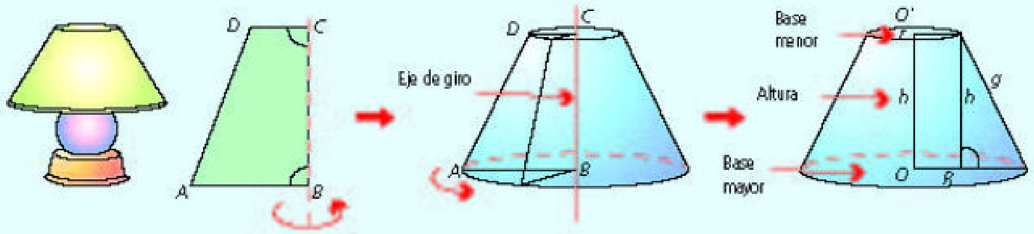
Un rectángulo que gira sobre un lado describe un *cilindro*.



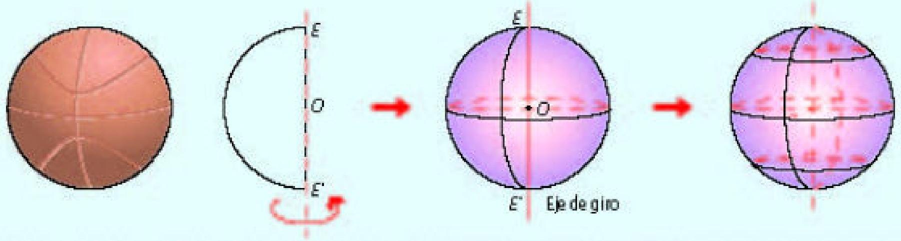
Un triángulo rectángulo que gira sobre un cateto describe un *cono*.



Un trapecio rectángulo que gira sobre el lado perpendicular a las bases describe un *tronco de cono*.

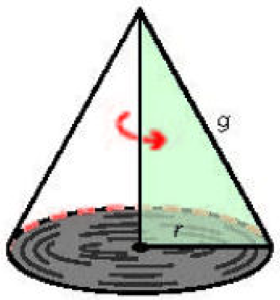


Un semicírculo que gira sobre su diámetro describe una *esfera*.



IDENTIFICA

Los conos están emparentados con las pirámides. Con base en esto, ¿cómo describirías un cono a partir de sus características? Para responder analiza la siguiente figura.



CONSTRUYE

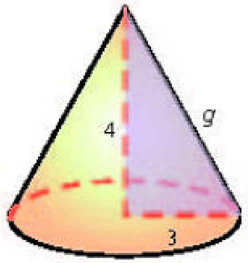
De acuerdo con la actividad anterior, responde lo que se solicita a continuación:

1. Si tuvieras que determinar el valor de la generatriz, ¿qué procedimiento seguirías?
2. ¿Tendrá relación la forma de la figura con la que obtiene este cuerpo de revolución? ¿Cuál? Argumenta tu respuesta.

DECIDE

Comprueba tus conclusiones resolviendo el siguiente problema:

1. En un cono el radio de la base mide 3 cm y la altura 4 cm, ¿cuánto mide la generatriz?
2. Describe cada paso del procedimiento que realices.
3. Compara tu estrategia con las de tus compañeros.



Profundizando

En este apartado se propone una tarea que tiene como fin la reflexión sobre la forma desarrollada de los cuerpos de revolución, como son el cono y el cilindro.

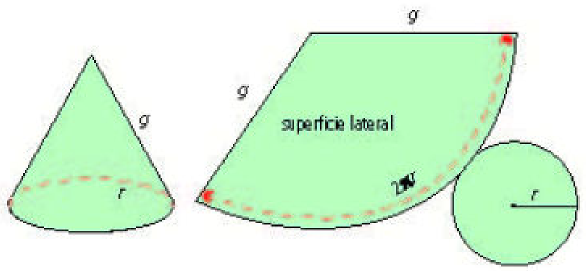
Formen equipos de tres y realicen lo siguiente:

- Para esta actividad necesitan dos cuerpos: uno que tenga forma de cono y otro de cilindro.
- Una hoja o pliego de papel y tijeras.

Procedimiento:

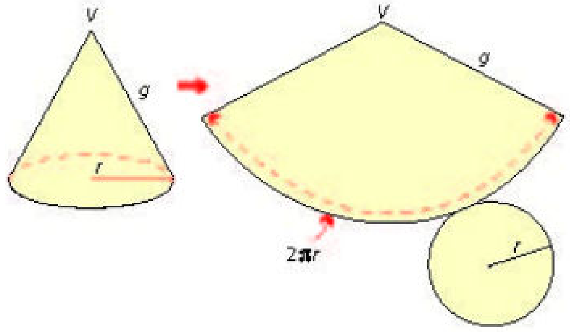
1. Forren el cono y el cilindro con el papel.
2. Corten el excedente de las bases tanto del cono como del cilindro.
3. Corten el papel que envuelve al cono y al cilindro por una generatriz.
4. Extiéndanlos sobre su mesa o papeleta.
   a) ¿Qué figura es la que se obtiene del cono? ¿Cuál del cilindro?
   b) Marca las bases de cada cuerpo y completa el desarrollo plano de cada uno.

1. El siguiente desarrollo es de un cono
   a) ¿Cómo describirías la medida de la generatriz?
   b) ¿Cómo describirías la medida de la generatriz de un cilindro?

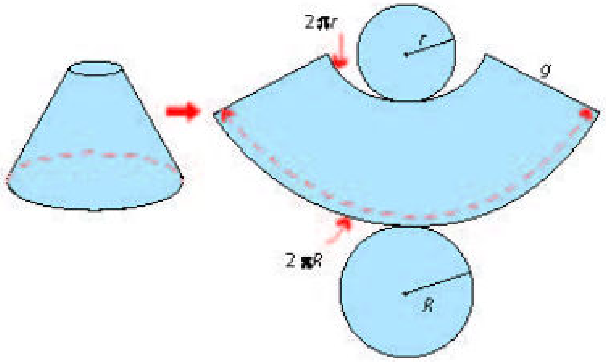


II. A continuación se presentan un cuerpo y su desarrollo. Explica para cada uno el procedimiento que emplearías para realizar lo siguiente:

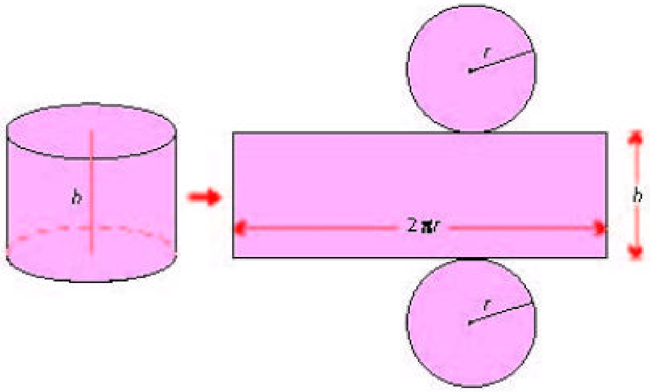
a) Desarrollo plano del cono:



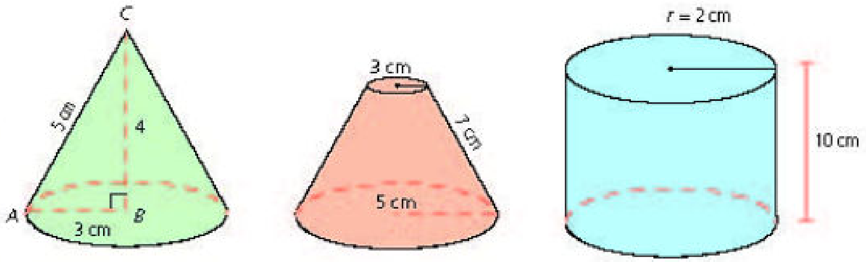
b) Desarrollo plano del tronco de cono:



c) Explica el procedimiento para realizar el desarrollo plano del cilindro:



III. Construye los siguientes cuerpos en cartulina.



Resumiendo

En esta lección estudiamos que un objeto sólido es una parte del espacio limitada por superficies planas y curvas. Se le conoce también como cuerpo o sólido geométrico.

La redondez de un cuerpo se obtiene al girar una figura plana alrededor de uno de sus ejes de simetría, de tal manera que cada punto de la figura describe una circunferencia cuando da una vuelta completa. Por tal motivo, a los cilindros, conos y esferas se les denomina *sólidos de revolución*.

El *cilindro* se genera al hacer girar un rectángulo en torno a uno de sus lados o a un segmento paralelo a ellos.

Un *cono* se obtiene al girar en torno a su eje de simetría un triángulo isósceles.

La *esfera* se origina al girar un círculo en torno a uno de sus ejes.

El *tronco de cono* se produce al hacer girar sobre su eje un trapecio rectángulo.

Al desdoblar un sólido geométrico y colocar la figura que resulta sobre una superficie lisa se obtiene un desarrollo plano del cuerpo.

Un cilindro está formado por dos caras circulares llamadas bases y una cara lateral que es un rectángulo, donde la altura de éste es también la altura del cilindro.

El desarrollo plano del cono se compone por una cara circular que es la base y un sector circular que representa a la cara lateral. En este caso la altura del cono es diferente al radio del sector circular.

En el caso de la esfera no es posible hacer un exacto desarrollo del plano de este sólido; por eso es que los mapas de la Tierra presentan cierta distorsión.

Medida

4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

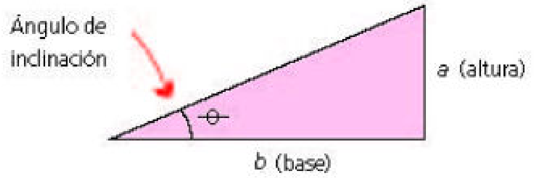
Desde la antigüedad las rampas y desniveles han sido utilizados para acarrear los materiales de construcción de edificios, estructuras como acueductos, escaleras, carreteras, redes de alcantarillado y vías de ferrocarril.

Como verás, los planos inclinados han facilitado ciertos trabajos como agilizar la corriente de agua en un canal y evitar la obstrucción de éste, aquí el ángulo de inclinación de la pendiente es determinante. La inclinación de un plano permite reducir el esfuerzo para elevar una masa.

IDENTIFICA

Se quieren construir planos inclinados para un experimento en la asignatura de Física.

Para medir el ángulo de inclinación de cada plano, se considerarán dos medidas, la base y la altura:



Los planos inclinados son máquinas que nos permiten disminuir el trabajo que se requiere para trasladar un objeto de una posición a otra.

CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

1. Investiga el uso y las aplicaciones de los planos inclinados en la vida cotidiana. Escríbelos.
2. Compara los siguientes planos inclinados.

Caso	Plano inclinado 1	Plano inclinado 2
1	a = 1.5	a = 1.5
	b = 5.5	b = 6.5
2	a = 1.5	a = 1.8
	b = 5.5	b = 5.5
3	a = 1.5	a = 2
	b = 5	b = 8

Tabla 4.18

3. Traza los planos inclinados utilizando los ejes cartesianos. ¿Qué plano inclinado tiene mayor ángulo de inclinación? Argumenta tu respuesta.

DECIDE

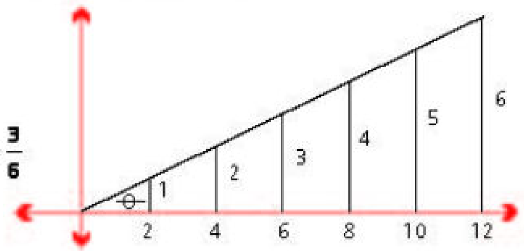
Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:

La siguiente figura muestra varios planos inclinados presentados en los mismos ejes cartesianos.

Las medidas de la base y la altura son diferentes.

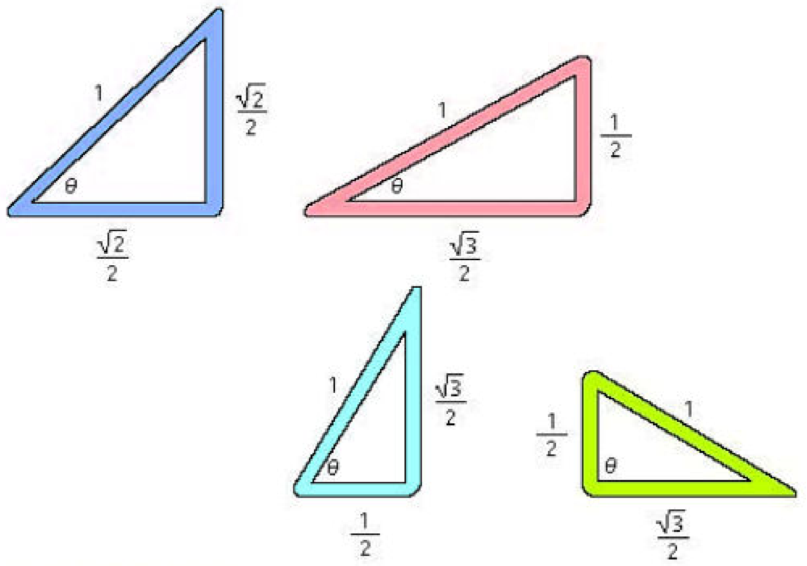
1. ¿Qué sucede con el ángulo de inclinación de los planos inclinados?
2. ¿Cómo son los triángulos que forman los planos inclinados? Observa la siguiente relación.

$$\frac{\text{Altura del plano inclinado}}{\text{Distancia horizontal}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$



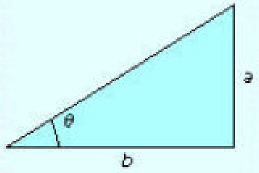
Gráfica 4.1

3. ¿Para qué sirve la tangente en un triángulo rectángulo?
4. ¿Cómo se obtiene el valor del ángulo θ?
5. Determina el ángulo θ en los siguientes triángulos rectángulos; para ello es necesario que utilices tu calculadora científica.



Algo esencial

La razón entre el cateto opuesto a y el cateto adyacente b se llama *tangente del ángulo* θ, y se escribe tangente del ángulo $\theta = \frac{a}{b}$



COMUNICA

Observa y comenta con tus compañeros la relación que encuentras entre los ángulos agudos y la inclinación de una recta. Escribe en tu cuaderno tus conclusiones que se obtengan después del debate de ideas.

IDENTIFICA

Para realizar el experimento del plano inclinado en la asignatura de Física se han considerado las siguientes condiciones iniciales:

- Se requiere que el ángulo de inclinación sea de 45°.
- La altura debe ser de 2 m.

Se requiere descubrir la longitud de la base del plano para su posible construcción.

CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

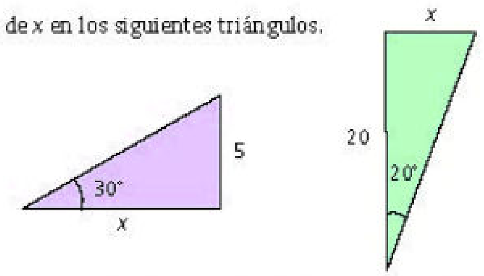
1. Traza el plano inclinado con la información correspondiente.
2. Identifica en la figura que acabas de realizar, los catetos y determina el valor de la tangente de 45° para sustituir los valores en: $\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

De esta igualdad podemos obtener el dato desconocido, que es la longitud de la base del plano inclinado; para ello es necesario que utilices tu calculadora científica.

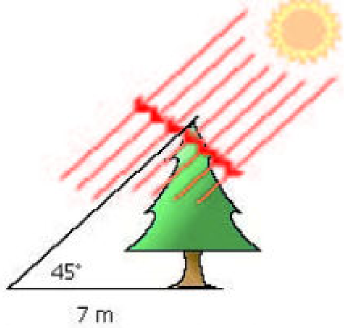
DECIDE

Analiza las actividades anteriores y resuelve en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

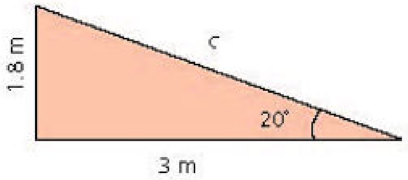
1. Encuentra el valor de x en los siguientes triángulos.



2. Los rayos solares forman un ángulo de 45°. Calcula la altura del árbol, sabiendo que la sombra mide 7 m.



3. Un alumno propuso el siguiente plano inclinado:

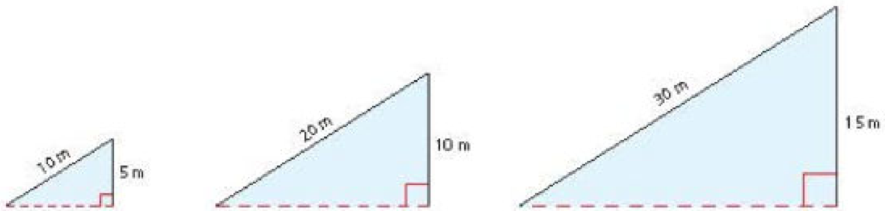


y le pidió a todo el grupo que le ayudaran a determinar el valor de la hipotenusa.
a) ¿Qué procedimiento utilizarías para resolver este problema? Escríbelo.
b) ¿Se utiliza nuevamente la tangente? ¿Cómo se llama esta relación?

4. En una competencia de diseño y vuelo de papalotes se registró el vuelo de uno de ellos.

Longitud de la cuerda	Altura alcanzada
10 m	5 m
20 m	10 m
30 m	15 m

Tabla 4.19

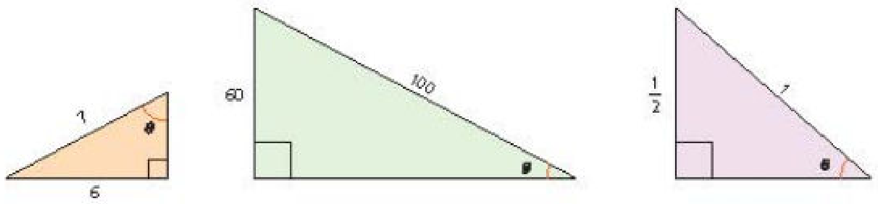


a) ¿Qué sucede con el ángulo de inclinación de la cuerda del papalote?
b) ¿Cómo son los triángulos que se forman?
c) Observa la siguiente relación y escríbela:

$$\frac{\textbf{Altura alcanzada por el papalote}}{\textbf{Longitud de la cuerda}} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

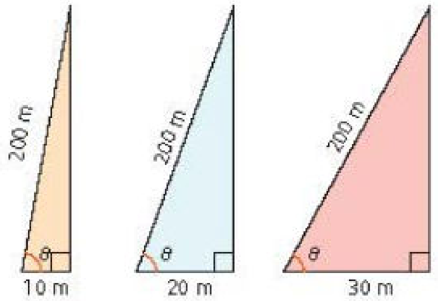
d) ¿Para qué sirve el seno en un triángulo rectángulo?
e) ¿Cómo se obtiene el valor del ángulo θ?

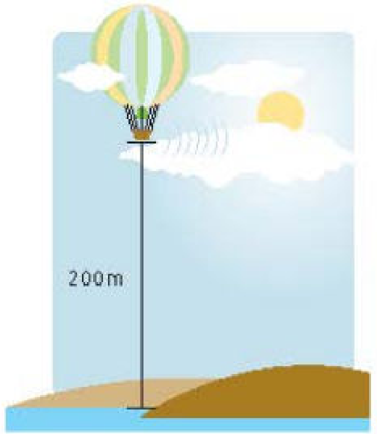
5. Determina el ángulo θ en los siguientes triángulos rectángulos; para ello es necesario que utilices tu calculadora.



6. Resuelve cada uno de los siguientes problemas:
a) Una escalera de 5 m de largo se apoya en una pared; la altura que alcanza en la pared es de 4.70 m. Calcula el ángulo que se forma en el pie de la escalera.
b) Las puntas de un compás están separadas 8 cm y cada una mide 14 cm de largo. Encuentra el ángulo que forman.

7. Un globo aerostático está atado a una cuerda cuyo largo es de 200 m. Una brisa de aire lo desvía de su posición vertical 10 m, 20 m y 30 m, obteniéndose los siguientes triángulos.
a) Explica lo que sucede al ángulo de inclinación θ.
b) Los triángulos que se han formado son semejantes. Argumenta tu respuesta.

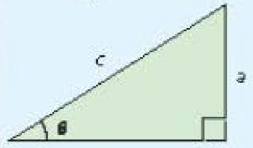




Algo esencial

La razón entre el cateto opuesto a y la hipotenusa c se llama *seno del ángulo* θ, y se escribe:

$$\text{Sen } \theta = \frac{a}{c}$$

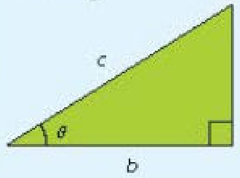


c) ¿Para qué sirve el coseno de un triángulo rectángulo?
d) ¿Cómo se obtiene el valor del ángulo θ?
e) Utiliza la calculadora para determinar el valor del ángulo θ en cada uno de los triángulos que hacen referencia al globo aerostático.

Algo esencial

La razón entre el cateto adyacente b y la hipotenusa c se llama *coseno del ángulo* θ y se escribe:

$$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c}$$



COMUNICA

Comenta con tus compañeros tus respuestas. Explica cómo obtuviste el valor de los ángulos de inclinación en cada ejercicio y cómo se relaciona este concepto con el Teorema de Pitágoras. Escribe en el cuaderno las conclusiones que obtengan entre todos.

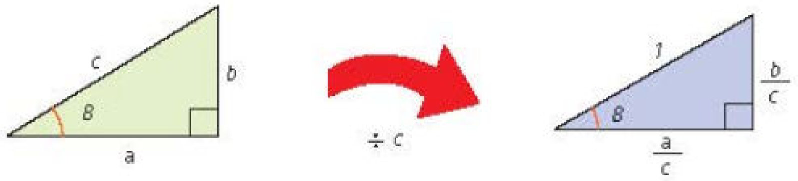
Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Sean a, b y c los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo rectángulo se denomina unitario cuando tiene como unidad de medida la hipotenusa.

Podemos pasar al triángulo rectángulo unitario dividiendo todos los lados entre el valor de la hipotenusa, así ambos triángulos son semejantes.

Si se dividen los lados entre c, los valores de los lados del nuevo triángulo semejante son:



$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1$ Por tanto:

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Comprueba esta igualdad $\tan B = \frac{b}{a} = \frac{\text{sen } B}{\cos B}$.

Para obtener el valor del ángulo B se utiliza la calculadora y en ella, cualquiera de las siguientes teclas, ya que el resultado es el mismo:

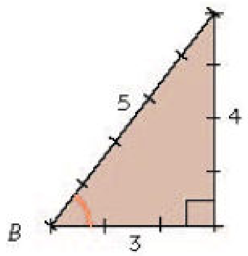
Símbolo:	$\boxed{\cos^{-1}}$	$\boxed{\text{sen}^{-1}}$	$\boxed{\tan^{-1}}$
Nombre:	Arco coseno	Arco seno	Arco tangente

En el siguiente triángulo se conocen los lados y se calcula el ángulo B. Se utiliza la calculadora tal como está escrito.

$$\cos B = \frac{3}{5} \Rightarrow B = \boxed{\cos^{-1}} \left(\frac{3}{5}\right) = 53.13°$$

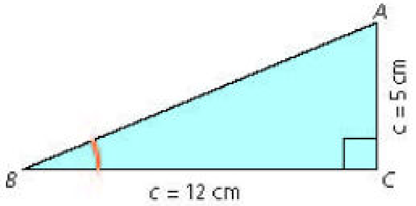
$$\text{sen } B = \frac{4}{5} \Rightarrow B = \boxed{\text{sen}^{-1}} \left(\frac{4}{5}\right) = 53.13°$$

$$\tan B = \frac{4}{3} \Rightarrow B = \boxed{\tan^{-1}} \left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$



Ejercicio

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas del ángulo B y la medida de este ángulo.



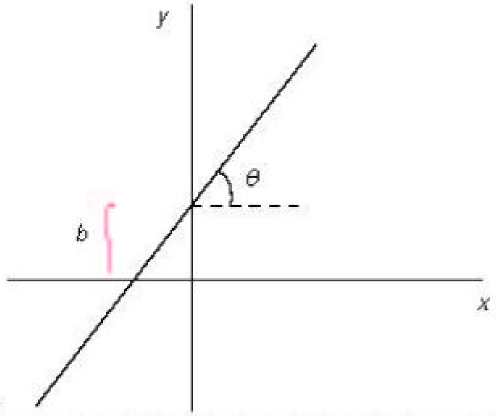
Resumiendo

Las características de una recta que se traza en un plano cartesiano son la pendiente y la ordenada al origen.

a) La *pendiente* (m) se define como su grado de inclinación y es la tangente del ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) que forma la recta con el eje x.

$$m = \tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

b) La *ordenada al origen* (b) es la distancia que existe del origen al punto donde la recta cruza al eje y.



Gráfica 4.2

4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

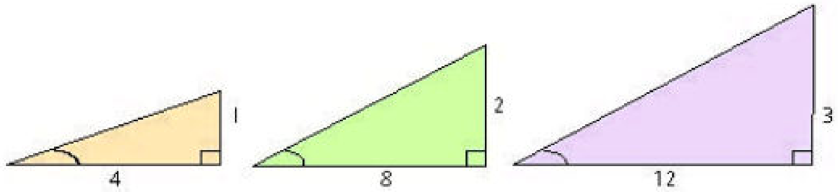
Hacia el año 600 a.n.e., en Egipto, un enviado le pidió a Tales de Mileto, en nombre del soberano, que calculara la altura de la Gran Pirámide de Giza. En efecto, corría la voz de que el sabio podía calcular la altura de construcciones elevadas por arte geométrica, sin subir a ellas. Tales se apoyó en un bastón y esperó hasta que, a media mañana, la sombra del bastón, mantenido en posición vertical, tuviera una longitud igual a la del bastón. Entonces dijo al enviado: "Ve y mide rápidamente la longitud de la sombra de la Gran Pirámide; en este momento es tan larga como su altura".

No es seguro que las cosas sucedieran así, pero Tales midió la altura de las pirámides mediante la sombra que proyectaban. Piensa ahora en esta situación:

Si el bastón y la sombra son iguales, significa que el triángulo rectángulo es isósceles. Así los catetos son iguales y el ángulo que forman los rayos solares es de 45°.

IDENTIFICA

Los triángulos siguientes son triángulos rectángulos. Analízalos y contesta lo siguiente:



a) ¿Qué tienen en común?
b) ¿Estos triángulos rectángulos son semejantes?
c) Completa la razón de semejanza.

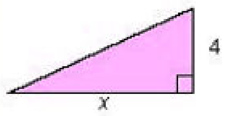
$$\frac{\text{Altura}}{\text{Base}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

CONSTRUYE

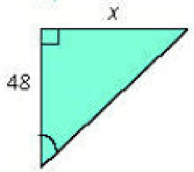
Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

1. Con la información obtenida determina el valor de x en cada una de las siguientes figuras.

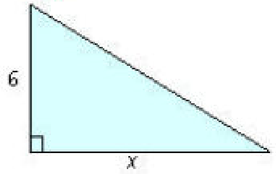
I)



II)



III)



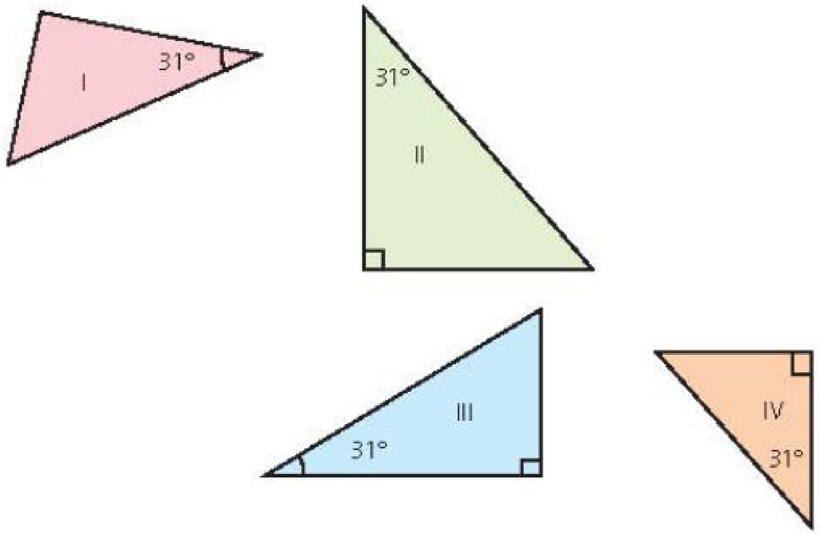
x = ______ x = ______ x = ______

2. Con los datos de los triángulos anteriores completa la tabla con los valores correspondientes.

Triángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente
I		
II		48
III	6	

Tabla 4.20

3. Las siguientes figuras son triángulos rectángulos con un ángulo de 31°.



a) Si la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a 31° es de $\frac{8}{9}$, ¿cuál es el valor del cateto opuesto en cada triángulo? Completa la tabla.

Triángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente
I		10
II		40
III		20
IV		5

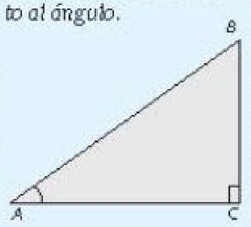
Tabla 4.21

4. Traza un triángulo rectángulo semejante a los anteriores cuyo cateto adyacente mida 6 unidades.

Algo esencial

En un triángulo rectángulo ABC.

AC se llama *cateto adyacente al ángulo*.
BC se llama *cateto opuesto al ángulo*.



DECIDE

Analiza la información recabada en las actividades anteriores y resuelve en tu cuaderno cada uno de los siguientes problemas.

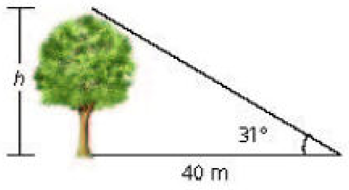
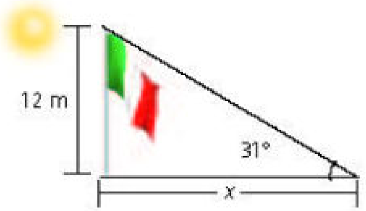
Figura	Escribe un enunciado	Solución
		
		

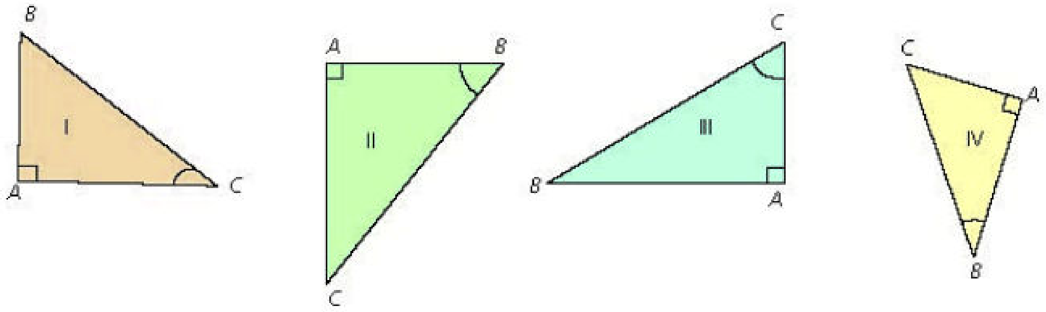
Tabla 4.22

COMUNICA

Comparte tu trabajo con tus compañeros e intercambien puntos de vista. Escribe en el cuaderno las conclusiones que obtengan entre todos.

IDENTIFICA

Las siguientes figuras son triángulos rectángulos.



1. Completa la tabla indicando los segmentos correspondientes.

Triángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa
I			
II			
III			
IV			

Tabla 4.23

2. Traza en tu cuaderno tres triángulos diferentes con un ángulo de 40°. Utiliza el juego de geometría.
3. Mide con la mayor precisión cada uno de los lados de los triángulos y completa la tabla.

Triángulo	Cateto opuesto a 40°	Cateto adyacente a 40°	Hipotenusa
I			
II			
III			

Tabla 4.24

CONSTRUYE

1. Con los datos que obtuviste en las actividades anteriores, completa la siguiente tabla con las razones correspondientes.

Triángulo	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
I			
II			
III			

Tabla 4.25

2. Compara tus resultados con tus compañeros.
3. ¿Qué ocurre con las razones en cada triángulo?
4. Escribe tus conclusiones con respecto a cada una de las razones.

DECIDE

Resuelve los siguientes problemas, al terminar, en grupo expongan su procedimiento para encontrar la solución.

Datos	Figura	Solución
$\frac{\text{C. adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = 0.8$ cm Hipotenusa = 15 cm C. adyacente = x		

Tabla 4.26

Datos	Figura	Solución
$\frac{\text{C. adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = 2.4$ cm Hipotenusa $= 3.5$ cm C. opuesto $= x$		
$\frac{\text{C. adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = 0.5$ cm C. adyacente $= 8$ cm Hipotenusa $= x$		

Tabla 4.27

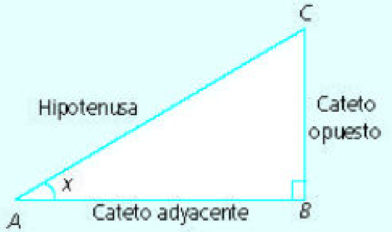
Algo esencial

En un triángulo rectángulo *ABC*, las razones trigonométricas son *seno*, *coseno* y *tangente*.

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{BC}{AC} = \text{Seno del ángulo } x = \text{sen } x$$

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AB}{AC} = \text{Coseno del ángulo } x = \cos x$$

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{BC}{AB} = \text{Tangente del ángulo } x = \tan x$$



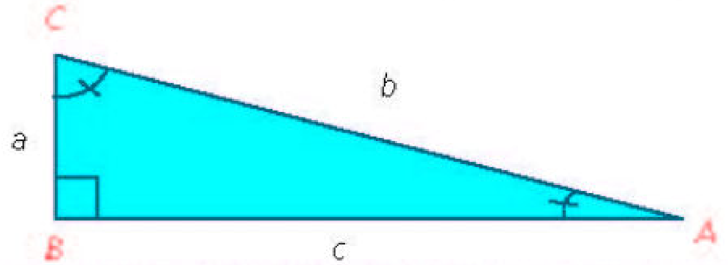
Resumiendo

Cada uno de los cocientes que se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, se conoce como *razón trigonométrica de un ángulo agudo*. Las razones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente* relacionan los ángulos agudos y los lados de un triángulo rectángulo de la siguiente forma:

$\text{sen}\,A = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\text{sen}\,C = \frac{c}{b}$

$\cos A = \frac{c}{b}$ $\qquad$ $\cos C = \frac{a}{b}$

$\tan A = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\tan C = \frac{c}{a}$

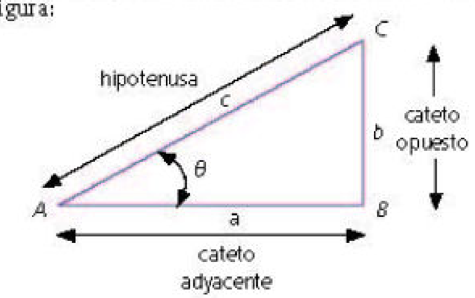


Utilizando dichas relaciones se pueden calcular los elementos desconocidos a partir de los conocidos. Por ejemplo, podemos obtener el valor del otro cateto o la hipotenusa, si se conocen dos lados del triángulo (un cateto y la hipotenusa o los dos catetos). Asimismo, cuando se conoce un lado y un ángulo agudo del triángulo, es posible calcular el otro ángulo agudo y un cateto, o bien un ángulo agudo y la hipotenusa.

Estas relaciones son muy útiles para conocer la altura de objetos como árboles y edificios o distancias entre dos objetos.

4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Como vimos en lecciones anteriores, los lados de un triángulo rectángulo se denominan de acuerdo con la siguiente figura:



Se le llama *adyacente* porque es el lado que está junto al ángulo agudo, y al lado que se ubica frente al ángulo agudo se le nombra *opuesto*.

Estas relaciones determinan las tres funciones más importantes en trigonometría que son el seno, el coseno y la tangente. Cada una es la longitud de un lado dividida entre la longitud de otro, es decir:

$$\textbf{sen}\,A = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan A = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Estas funciones trigonométricas se pueden representar como valores de segmentos asociados a triángulos rectángulos auxiliares, de la siguiente manera, cuando en un plano cartesiano, (x, y) es un punto de la circunferencia unidad, y el radio que tiene el origen en $(0, 0)$, forma un ángulo (θ) con el eje X:

a) El *seno* es la razón entre el cateto opuesto (b) y la hipotenusa (c): $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{c}$
Como la hipotenusa es igual al radio, cuyo valor es igual a 1, entonces: $\text{sen}(\theta) = b$

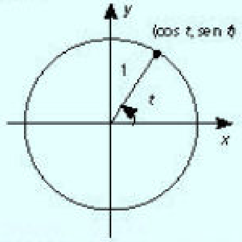
b) El *coseno* es la razón entre el cateto adyacente (a) y la hipotenusa (c): $\cos(\theta) = \frac{a}{c}$
si la hipotenusa tiene valor es igual a 1, se deduce: $\cos(\theta) = a$

c) La *tangente* es la razón entre el cateto opuesto (b) y el adyacente (a): $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$
al ser el valor de la tangente igual a 1, se tiene que: $\tan(\theta) = b$

Algo esencial

La *circunferencia unitaria* o *círculo unidad* es una circunferencia de radio uno, por lo general con su centro en el origen (0, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas y los ángulos se generan de derecha a izquierda. Cuando se marca un ángulo se hace con el giro del radio que mide uno. Si se traza una perpendicular del punto que forma el radio con la circunferencia hacia el eje de las X se forma un triángulo rectángulo.

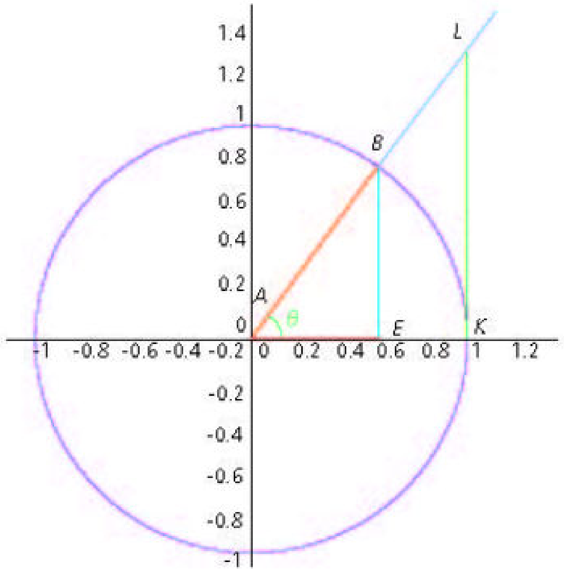
Dicha circunferencia facilita el estudio de las razones trigonométricas, mediante la representación gráfica de triángulos rectángulos auxiliares.



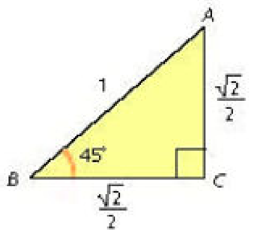
Si se traza un triángulo ALK, semejante a ABE, con la prolongación de c y la tangente KL, entonces puede establecerse la siguiente igualdad:

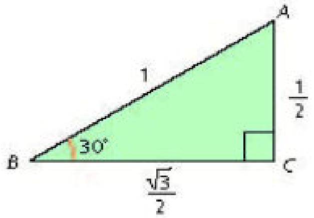
$\frac{BE}{AE}=\frac{KL}{AK}$, pero como AK es igual a 1, entonces, $\frac{BE}{AE}=KL$

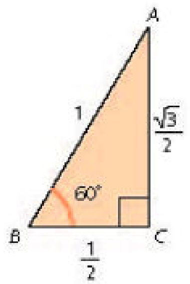
Se puede concluir que la tangente de $\theta\left(\frac{BE}{AE}\right)$ es igual a KL o bien al valor de la ordenada del punto L.



Para algunos ángulos es posible calcular las razones directamente utilizando el Teorema de Pitágoras. En las siguientes figuras se dan las razones trigonométricas de los ángulos 45°, 30°, 60°. Corresponden a los ángulos de las escuadras.







CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y responde en tu cuaderno lo siguiente:

1. Estudia los triángulos anteriores y completa la siguiente tabla con los valores correspondientes.

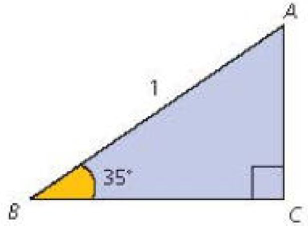
a) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	d) $\cos 30° =$	g) $\cos 60° =$
b) $\text{sen } 45° =$	e) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$	h) $\text{sen } 60° =$
c) $\tan 45° =$	f) $\tan 30° =$	i) $\tan 60° = \sqrt{3}$

Tabla 4.28

DECIDE

Recuerda lo estudiado anteriormente y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación:

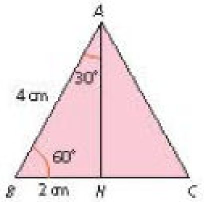
1. En el siguiente triángulo se conoce el ángulo B y la hipotenusa. Determina sus razones trigonométricas y para ello usa la calculadora. Completa la tabla y los valores de los catetos.



cos 35° =	Cateto adyacente =
sen 35° =	Cateto opuesto =
tan 35° =	Hipotenusa =

Tabla 4.29

2. El lado de un triángulo equilátero mide 4 cm. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.



Explora en internet

Visita la página http://matematicasmodernas.com/funciones-trigonometricas-ejercicios-resueltos/
Este sitio está dedicado al estudio de las funciones trigonométricas.
Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

COMUNICA

Comparte tus resultados con tus compañeros y comenta en el grupo qué particularidad tienen los triángulos con el mismo seno y, en este caso, qué relación guardan el cateto opuesto y la hipotenusa entre sí. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

Explora en internet

Visita la página http://www.phy6.org/stargaze/Mtrig1.htm
En este sitio titulado "(M-7) La trigonometría, ¿para qué sirve?" se encuentra información referente a las ideas básicas de la trigonometría; visítalo y complementa tu conocimiento sobre los triángulos rectángulos.

Fecha y hora de consulta: 4 de junio de 2013, 14:00.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo con tus compañeros, estudien la solución del problema del inciso *a* y resuelvan los demás incisos.

Es importante compartir con tus compañeros las ideas que se generan sobre la comprensión del problema.

Estima una solución del problema y, sobre todo, genera un plan de acción.

Problema

Dadas las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{sen } B = 0.6$ b) $\cos B = 0.75$ c) $\tan B = 1.2$

Halla las restantes si el ángulo es agudo.

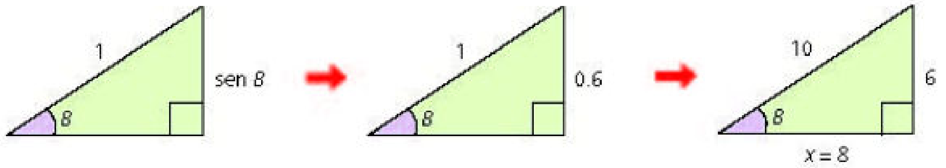
Resolución del problema

Las definiciones son también muchas veces algoritmos para resolver problemas, siempre que se utilicen adecuadamente.

Sea $\text{sen } B = 0.6$

$\text{sen } B$ es la medida del cateto opuesto cuando la hipotenusa es la unidad.

Observa en las siguientes figuras cómo se aplica la definición:



A partir del último triángulo, semejante a los anteriores, se obtiene el valor x utilizando el Teorema de Pitágoras. El valor de x es 8.

Conocidos los tres lados del triángulo rectángulo, las restantes razones se obtienen aplicando nuevamente la definición:

$\cos B = \frac{8}{10} = 0.8$ $\text{sen } B = \frac{6}{10} = 0.6$ $\tan B = \frac{6}{8} = 0.75$

Ahora aplica las experiencias adquiridas en el problema anterior para resolver lo siguiente.

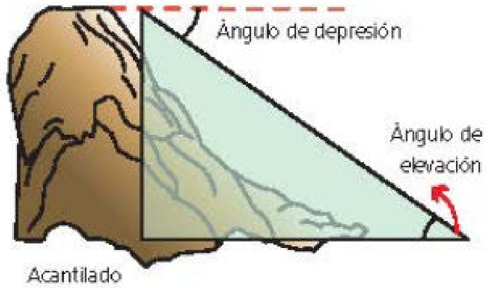
Aplicaciones

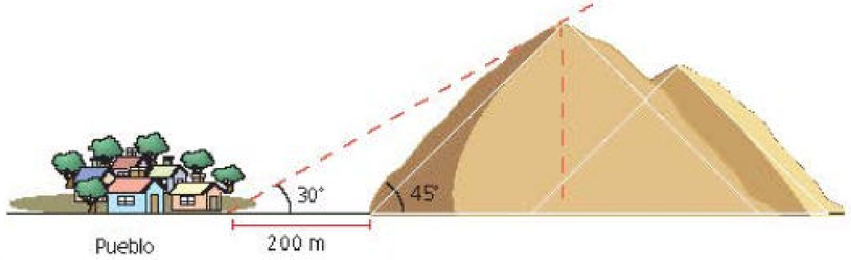
1. **Topografía**

La topografía tiene como objeto medir extensiones de tierra. Para ello, el topógrafo mide con el teodolito ángulos sobre el terreno y por medio de cálculos matemáticos consigue obtener distancias horizontales y verticales, áreas y volúmenes.

El teodolito es un instrumento que se utiliza para medir ángulos y que consiste, esencialmente, en un plano horizontal y otro vertical. En cada uno de estos planos existe un círculo graduado donde se puede medir un ángulo, tanto horizontal como vertical. Cuando se mira hacia arriba desde el plano horizontal el ángulo se llama de elevación, por ejemplo, del suelo a una torre. Cuando se mira hacia abajo desde el plano horizontal el ángulo se llama de depresión, por ejemplo, de la torre al suelo.

Andrea, Rubén y Aurora van a escalar un monte del que desconocen la altura. A la salida del pueblo miden el ángulo de elevación, resultando de 30°. Después, avanzan 200 m hasta la base del montículo y vuelven a medir el ángulo de elevación, siendo de 45°. Calcula la altura del montículo.





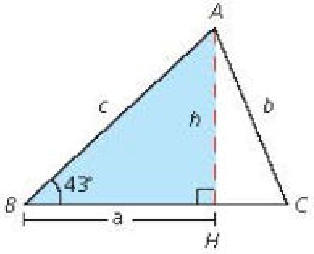
2. **Áreas**

Las figuras poligonales se pueden descomponer en triángulos; por ejemplo, trazando las diagonales o uniendo un punto interior con los vértices. El área de esa figura se reduce a sumar las áreas de los triángulos en que se descomponen. Por eso, saber calcular el área de un triángulo es saber calcular el área de una figura. Hasta ahora conocemos la fórmula:

$$\text{Fórmula básica: Área} = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2}$$

La trigonometría permite calcular los elementos de la fórmula básica, es decir, la base y la altura cuando el triángulo queda determinado por los lados y ángulos. Conocidos la base y la altura, se halla el área del triángulo.

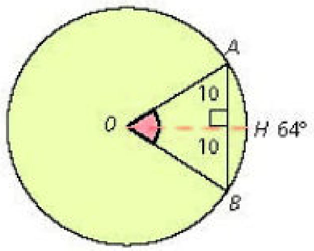
Halla el área de un triángulo $\triangle ABC$ conocidos $a = 8$ cm y $c = 10$ cm y el ángulo comprendido $B = 43°$.



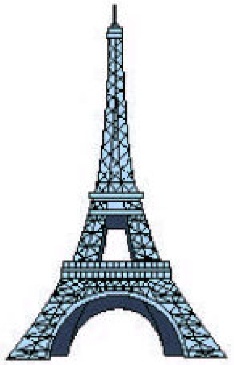
3. **Distancia**

El cálculo de distancias en geometría se puede ampliar a todos los casos cuando se conocen los ángulos y lados o aristas. Para resolver el problema hay que relacionar los datos y las incógnitas con un triángulo rectángulo donde se pueden aplicar las definiciones de las razones trigonométricas.

a) Halla el radio de una circunferencia, sabiendo que una cuerda AB de 20 cm tiene como arco correspondiente uno que mide 64°.



Resolviendo problemas



Resuelve los siguientes problemas.

1. Halla los ángulos de un paralelogramo, sabiendo que uno de ellos mide 40°.
2. El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide 70° y la base 12 cm. Halla el área.
3. Calcula la longitud de la sombra de la torre Eiffel (altura: 300 m) cuando la altura del Sol sobre el horizonte es de 80°.
4. La construcción de la famosa torre de Pisa concluyó en el año 1284. Al terminar se comprobó que la parte más alta de la torre se separaba de la vertical aproximadamente 90 cm.
   En la actualidad la separación es de 5 m y la altura de la torre es de 55 m. Calcula el ángulo que forma la torre con la vertical.
5. Las puntas de un compás distan 8 cm y cada una mide 14 cm. Halla el ángulo que forman.
6. Desde la orilla de un río se ve un árbol bajo un ángulo de 45° y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30°. Halla la altura del árbol y el ancho del río.
7. Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden a y $4a$, ¿la hipotenusa es cuatro veces un cateto? Razona la respuesta.
8. De un triángulo se sabe que tiene dos ángulos que miden $A = 60°$ y $B = 70°$. ¿Se puede resolver?
9. Un alumno dice que hay triángulos rectángulos en que los senos de los ángulos coinciden con las medidas de los lados opuestos. ¿Es cierto o falso?
10. Si conoces el lado a de un triángulo y los ángulos B y C, tales que $B + C < 90°$, ¿es posible resolver el triángulo? ¿Qué teorema tienes que aplicar?

Resumiendo

En este tema repasamos que todo triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° y que sus ángulos interiores suman 180°.

Para solucionar los triángulos rectángulos se utilizan principalmente las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente, así como el Teorema de Pitágoras.

Resolver un triángulo rectángulo significa obtener la medida de sus ángulos y las longitudes de sus lados.

Estas funciones se pueden calcular mediante una circunferencia que se traza en un plano cartesiano. Si este círculo tiene centro en el origen de coordenadas y su radio mide la unidad, entonces lo llamamos *círculo unitario*.

Proporcionalidad y funciones

4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

En televisión, periódicos, revistas y libros técnicos aparece información económica, científica, social, deportiva, etcétera, expresada mediante gráficas. En nuestro mundo actual, el lenguaje gráfico es un instrumento imprescindible para conocer y transmitir información. La utilidad de las gráficas reside en que proporcionan una visión "panorámica" de los fenómenos y muestran cómo dependen unas magnitudes de otras. En esta lección aprenderemos a interpretar gráficas y a describir los fenómenos lineales que éstas representan.

Asimismo podrás trabajar la modelación matemática, es decir, tendrás la experiencia de describir diversos fenómenos con variables numéricas, esto implica determinar la medición de sus valores y las condiciones bajo las cuales la anticipación esperada es pertinente, entre otras. También se da una aproximación a las características fundamentales de los fenómenos lineales y de sus formas de representación.

Finalmente, determinarás la función que representa a un fenómeno poniendo en juego tu creatividad y manipulación con un rumbo determinado.

Antes de iniciar este apartado revisaremos algunas ideas importantes, por ejemplo: Dependencia entre magnitudes.

1. Comenta con tus compañeros qué es una magnitud y escribe algunos ejemplos; para ello explica cómo las magnitudes, el tiempo, el nivel del agua, entre otros, se relacionan para entender un fenómeno.

Reflexiona sobre la siguiente información:

Un grifo llena un vaso dejando caer cada minuto una cantidad de agua, como se indica en la tabla.

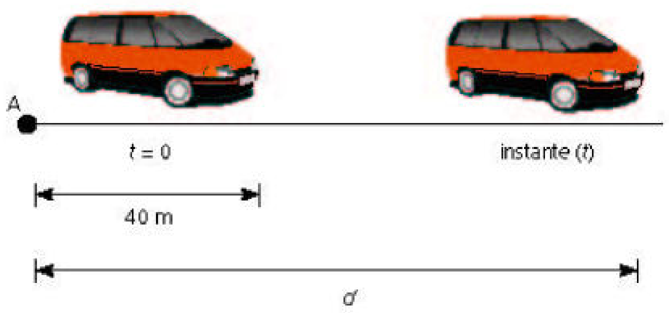
t (min)	Nivel de agua (cm^3)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20

Tabla 4.30

2. Explica cómo se relacionan las magnitudes: tiempo y nivel de agua.
3. Explica a tus compañeros los criterios que empleaste.
¿Cómo representarías la dependencia entre estos valores?
Escribe a continuación las coordenadas cartesianas de los pares de valores tiempo-nivel de agua.
4. En qué te basaste para determinar los valores de las abscisas y las ordenadas.
5. Grafica la relación de dependencia entre ambas magnitudes.
   a) ¿A qué se le llama variable dependiente?
   b) ¿A qué se le llama variable independiente?

IDENTIFICA

Un automóvil se desplaza con una velocidad constante de 108 $\frac{km}{h}$, por un tramo recto de una carretera. En el momento en que empezamos a medir el tiempo el automóvil se encuentra 40 m a la derecha de un punto A de referencia sobre la carretera, tal y como muestra la figura.

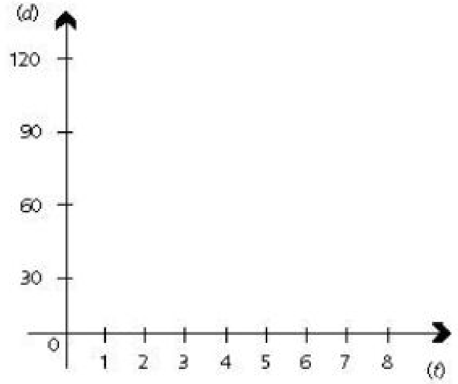


CONSTRUYE

Analiza la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.
1. ¿A qué velocidad va el automóvil en metros/segundos?
2. Explica cómo realizas la conversión de unidades y qué magnitudes intervienen.
3. ¿Cuál es el incremento cada segundo de la distancia?
   Comenta tu respuesta con tus compañeros.
4. Para conocer la forma en que se va moviendo el automóvil completa la tabla, en donde d representa la distancia recorrida en metros desde el punto A y t el tiempo transcurrido en segundos a partir de que se empieza a medir.
5. Traza la gráfica de t contra d.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	40	70	100							

Tabla 4.31



DECIDE

Analiza la gráfica anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.
1. ¿Cuál es la diferencia recorrida al cabo de 10 s?
2. En la gráfica, ¿qué significa el cambio del tiempo en segundos en el eje horizontal y el cambio de la distancia en metros en el eje vertical?
3. Encuentra el modelo que representa la distancia recorrida por el automóvil en función del tiempo, es decir, encuentra la ecuación que representa este movimiento.

Para hallar la expresión puedes utilizar la información de la tabla o la gráfica que realizaste y observar que en el momento que se empezó a contabilizar el tiempo, $t = 0$, el automóvil ya había recorrido 40 m. Al primer segundo había avanzado en total 40 + 30 (1) m, al segundo, 40 + 30 (2) m y así sucesivamente.

La gráfica que obtuviste es una semirrecta, que parte del punto (0, 40) y pasa por el punto (1, 70).

El incremento en la distancia respecto al tiempo es la razón de cambio. En la gráfica el cambio en la distancia se indica en la dirección vertical y el cambio en el tiempo en la dirección horizontal.

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en la distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}}$$

$$\text{razón de cambio} = \frac{70 - 40}{1 - 0} = \frac{30}{1} = 30$$

Algo esencial
Velocidad es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

Dos magnitudes que se relacionan pueden determinar y analizar razones de cambio de un fenómeno, por ejemplo:

Magnitud	Razón de cambio	Fórmula
Velocidad	Razón de cambio de la distancia en relación con el tiempo	$v = \frac{d}{t}$
Aceleración	Razón de cambio de la velocidad en relación con el tiempo	$a = \frac{v}{t}$

Tabla 4.32

4. Completa la tabla.

Magnitud	Razón de cambio	Fórmula
Tasa de crecimiento	Razón de cambio de una población respecto al tiempo	
	Razón de cambio de la temperatura de un líquido	$\frac{°C}{t}$
Aceleración		$\frac{F}{m}$

Tabla 4.33

5. Investiga y escribe otros fenómenos donde se observa la razón de cambio entre dos magnitudes.

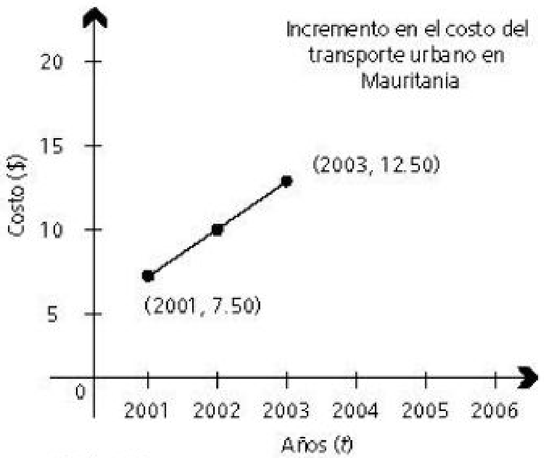
IDENTIFICA

En Mauritania, el transporte urbano aumenta de costo anualmente.

En la siguiente gráfica se muestran los cambios en los últimos años.

La pendiente es la inclinación que tiene una recta y su fórmula es: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

¿Cuál fue el incremento anual del costo, suponiendo que fue el mismo año? Contesta utilizando la gráfica y la fórmula de la pendiente.



Gráfica 4.3

CONSTRUYE

Considera la información anterior y responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. Para conocer la forma en que varía el costo del transporte en Mauritania completa la tabla, en donde *d* representa el costo del aumento del transporte en pesos desde el año 2000 y *t* el tiempo transcurrido en años.

t	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$		7.50		12.5			

Tabla 4.34

2. Traza la gráfica de *t* contra $.

DECIDE

De acuerdo con los datos obtenidos en las actividades anteriores resuelve en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

1. Determina la expresión que modela esta situación.
2. Determina la razón de cambio.

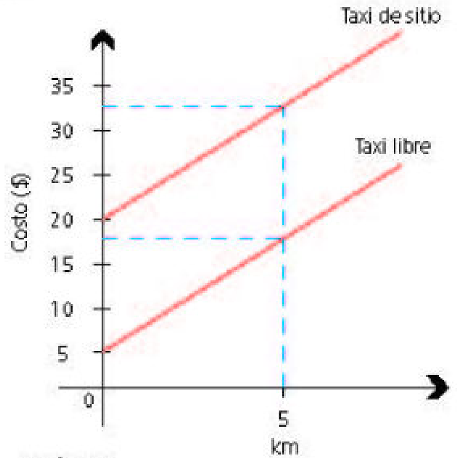
$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en el costo (\$) del transporte}}{\text{Cambio en el tiempo}}$$

3. Escribe con tus palabras qué es la razón de cambio y proporciona algunos ejemplos.

IDENTIFICA

En la Ciudad de México hay varios tipos de taxis, los que circulan sin un sitio base y los que tienen un sitio establecido, como los del aeropuerto.

La gráfica muestra el costo de un viaje en un taxi del tipo libre y de un taxi de sitio por el mismo recorrido.



Gráfica 4.4

1. ¿Cuál es el costo del viaje en cada taxi por kilómetro recorrido?

Ten en cuenta

La pendiente y la razón de cambio son la misma cuando la trayectoria es recta.

CONSTRUYE

Interpreta la gráfica anterior y responde en tu cuaderno las preguntas siguientes.

1. ¿Son distintos los incrementos en el costo por km recorrido?
2. ¿Cuál es el costo por un recorrido de 10 km en cada taxi?
3. Determina la razón de cambio y la pendiente en ambas gráficas. Explica lo que sucede.

DECIDE

Considera lo estudiado en las actividades anteriores, y responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. Se pagaron $100 a un taxi de sitio del aeropuerto, ¿cuántos kilómetros tendrán que ser recorridos?
2. Escribe con tus palabras el procedimiento que usaste para resolver este problema.

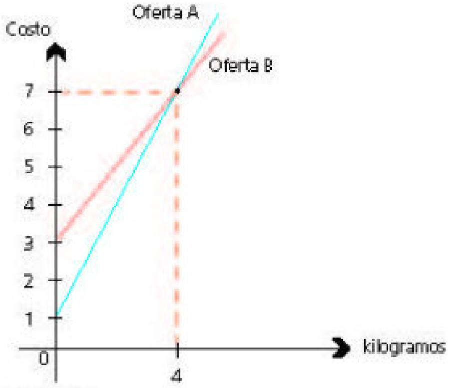
COMUNICA

Comenta en el grupo por qué se obtuvieron esos tipos de gráficas en todas las actividades anteriores. Resuelvan sus dudas con ayuda del profesor. Escribe las conclusiones a que llegaron.

Profundizando

Con la siguiente actividad estudiaremos otros aspectos sobre la razón de cambio en la que intervienen dos situaciones que tienen algo en común.

En la Central de Abastos dos proveedores hacen una oferta por kilogramo de papas, como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 4.5

Contesta las siguientes preguntas:

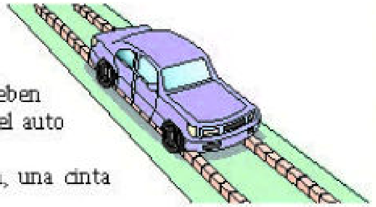
1. ¿Son distintos los incrementos en el costo por kg de papas por uno y otro proveedor?
2. ¿En qué momento son iguales las dos ofertas?
3. ¿Cuál es el costo en la oferta A y en la oferta B por kilogramo de papas?
4. ¿Cuál es el incremento por kilogramo de papas en cada oferta?
5. ¿El incremento en el costo de uno a 50 kg es el mismo que de 51 a 100 kg de papas?
6. Determina la pendiente de las gráficas anteriores ¿Son iguales o distintas?

Compara tus resultados con el grupo y escribe las reflexiones con las que obtuvieron la solución de este problema.

Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Necesitas un auto de pilas, cronómetro, cinta métrica y pistas de madera en donde se indique el lugar de salida, como se muestra en la siguiente figura.



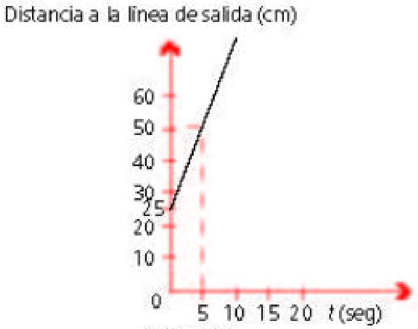
La velocidad de los autos debe ser constante y todas las pistas deben tener la misma longitud, además de construirse de tal manera que el auto no se desvíe para que se desplace siempre en línea recta.

Formen equipos, cada uno debe disponer de un auto, una pista, una cinta métrica y un cronómetro. El problema es el siguiente:

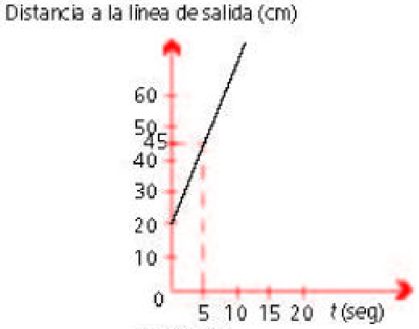
1. El auto se prepara y se suelta hasta ________ cm de la salida. ¿A qué distancia de la salida se encontrará el auto luego de ________ segundos?
2. Repitan varias veces esta misma experiencia.
3. Registren los valores obtenidos, expliquen qué sucede.
4. Estimen la distancia que recorre el auto en cierto tiempo. Realicen el experimento para comprobar.
5. Calculen cuánto tiempo tardará en recorrer 1 m. Realicen el experimento para comprobar.
6. Supongamos que cada uno de los autos se suelta a 25 cm de la salida. Contesten:
   a) ¿Qué valores le indicarían a una computadora para que calcule la distancia a la que se encuentra el auto de la línea de salida si se ingresa como dato el tiempo transcurrido desde que fue soltado? Expliquen.
   b) ¿Puede encontrarse el auto a 120 cm de la línea de salida a los 20 s de haber partido? ¿Por qué?
   c) ¿Y a 175 cm de la línea de salida a los 30 s de haber partido? ¿A 100 cm de la salida a los 15 s de partir? ¿Por qué?
7. ¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos puede corresponder a la distancia de la línea de salida en función del tiempo del auto considerado en la segunda parte? ¿Cuáles gráficos no pueden corresponder? ¿Por qué?

Gráfica 4.6

Gráfica 4.7



Gráfica 4.8



Gráfica 4.9

IDENTIFICA

Se dice que, en ciertos países, la policía no detiene a los automovilistas por exceso de velocidad, salvo que vayan al menos 10 por ciento (%) por encima del límite permitido. El radar sólo registra variaciones de velocidad a partir de los 100 kilómetros por hora.

Ten en cuenta

1 km = 0.62 millas

$10\ \frac{mi}{h} = 16.09\ \frac{km}{h}$

En uno de estos países se van a cambiar todos los señalamientos de tránsito, de kilómetros a millas. Antonio, el papá de Raúl, sabe que al circular por la autopista hacia su trabajo, a pesar de que la velocidad máxima reglamentaria es de 100 km/h, la "flexibilidad" de los inspectores le permitirá viajar hasta 110 km/h. El día en que se comienza a utilizar el nuevo sistema, Antonio, en el trayecto a su trabajo, se excede en 10 mi/h de la velocidad máxima reglamentaria que indican las nuevas señales de tránsito. Al llegar al puesto de peaje, un inspector pretende cobrarle una multa por exceso de velocidad. Antonio se niega a pagar la multa argumentando que el inspector quiere aprovecharse de las confusiones que provoca el nuevo sistema. ¿Es justo el reclamo de Antonio? Argumenta tu respuesta.

CONSTRUYE

Reflexiona la información anterior y resuelve en tu cuaderno lo que se pide a continuación.

1. Debido a que las discusiones por las multas son frecuentes, Antonio creó una tabla como la siguiente:

Velocidad máxima reglamentaria (km/h)	40	50	80	90	120
Velocidad máxima permitida (km/h)	44	55	88	99	132

Tabla 4.35

La información de esta tabla puede representarse en un gráfico cartesiano. ¿Te animas a construirlo?

a) Habrás observado que los puntos graficados están alineados. Esto significa que si decidiéramos unirlos mediante una línea recta, estaríamos afirmando que las velocidades intermedias tienen el mismo comportamiento. ¿Puede hacerse tal afirmación en este caso?
b) La velocidad máxima permitida por los inspectores es de 66 km/h cuando la máxima reglamentaria es de 60 km/h. ¿Crees que el punto (60, 66) estará alineado con los otros puntos graficados?
c) ¿Y el punto (65, 71)?

2. Con el cambio de sistema Antonio debe modificar su tabla. Ayúdalo a construirla. ¿Cómo se modificaría el gráfico?
3. Si los inspectores se pusieran más exigentes y no toleraran excesos de velocidad, ¿cómo cambiaría el gráfico?

DECIDE

De acuerdo con las respuestas anteriores contesta lo siguiente.

1. La tarifa vigente para las multas está diseñada de tal forma que, para un exceso de velocidad de hasta 15% con respecto a la velocidad máxima reglamentaria, corresponde pagar \$60. Luego de excederse 20% de esta velocidad en una zona urbana, un conductor discute con el inspector el monto de la multa. Mientras que el conductor considera que deberá pagar \$80, el inspector le señala que, en realidad, la multa es de \$120.
   a) ¿Cuáles argumentos crees que esgrime cada uno de ellos?
   b) ¿Cuál es el monto que debe pagar el conductor? ¿Por qué?
   c) Resuélvelo de dos maneras diferentes, suponiendo que la tolerancia sigue siendo de 10%.

COMUNICA

Comparte con tus compañeros tus respuestas a las cuestiones anteriores. Pidan ayuda a su profesor si tienen alguna duda respecto al procedimiento que siguieron para elaborar las tablas y los gráficos. Escribe las conclusiones a que llegaron.

IDENTIFICA

Mientras resuelve el problema, Juliana descubre la siguiente regularidad en la tabla:

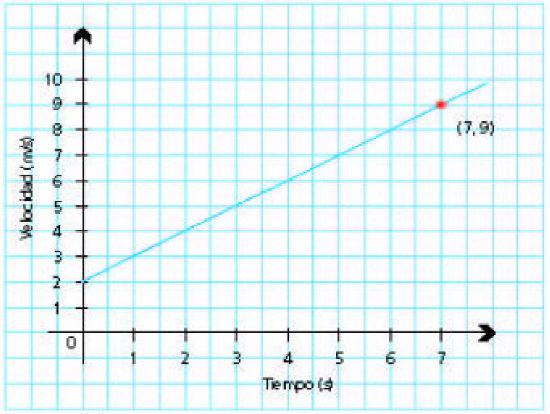
$$\frac{44}{40} = \frac{55}{50} = \frac{88}{80} = \frac{99}{90} = \frac{132}{120} = 1.1$$

1. Mariano detecta otra regularidad: al doble de velocidad reglamentaria le corresponde el doble de velocidad permitida. Tomás considera que Juliana y Mariano dicen lo mismo, ¿es cierto lo que dice Tomás?
2. Los chicos siguieron agregando puntos al gráfico y, al hacerlo, observaron otras regularidades. ¿Qué otras regularidades puedes encontrar?

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un taxista de Chihuahua cobra \$15.00 más \$12.50 por kilómetro recorrido. La señora Andrea le pagó \$130.00, incluyendo \$2.50 de propina. ¿Cuántos kilómetros recorrió?
2. La gráfica siguiente representa el movimiento de un automóvil de prueba:
   a) Expresa la velocidad con respecto al tiempo.
   b) ¿Qué representa la ordenada en el origen en esta expresión?
   c) ¿Qué velocidad lleva al cabo de 9 s?



Gráfica 4.10

3. Automóviles Arteaga alquila un coche a \$300.00 fijos más \$150.00 por día de alquiler. Automóviles Sánchez lo hace a \$500.00 fijos más \$100.00 por día de alquiler. Rubén quiere alquilar un coche y necesita saber en qué monto son iguales las dos propuestas.
4. Un repartidor de pizzas tiene dos ofertas de trabajo: Pizzas *Memo* le paga \$40.00 por día y \$17.50 por pizza repartida y Pizzas *Pappini* le ofrece \$20.00 por día y \$20.00 por pizza repartida. Si tú fueras el repartidor, ¿en cuál pizzería trabajarías?

Resumiendo

En este apartado se estudió la *razón de cambio* de una variable respecto a otra, y concluimos que es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. A esta razón también se le conoce como *tasa de cambio*.

Si las variables no dependen una de la otra, entonces la tasa de cambio es igual a *0*.

Como la razón de cambio es una relación funcional $y = f(x)$, entonces, en estricto sentido, la razón de cambio es el límite del cociente diferencial cuando t tiende a *0*.

Cuando las cantidades son directamente proporcionales, su razón se mantiene constante, por ejemplo: "Si dos muñecas cuestan $234, entonces cuatro valen…".

Por otra parte, podemos deducir que la velocidad (distancia recorrida por unidad de tiempo) representa, la razón de cambio prototipo. Por analogía, se le llama "velocidad" a una razón de cambio cualquiera y éste es un ejemplo de proporción inversa.

Explora en internet

Visita la página: http://www.vitutor.com/estadistica/descriptiva/a_14.html

En este sitio podrás analizar un poco más los cálculos necesarios y las comparativas de la desviación media y el rango.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Análisis y representación de datos

4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

No basta con las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para caracterizar la distribución; debe también considerarse la variabilidad de las observaciones. Para medir esta variabilidad, se requiere de medidas como: amplitud (llamada también rango o recorrido), desviación media, varianza, desviación estándar o típica y coeficiente de variación.

Estas *medidas* son conocidas como de *dispersión* y complementan la información que proporcionan la media, la mediana y la moda; la más útil es la desviación típica, que se utiliza siempre que se calcula la media como medida de tendencia central.

La medida de dispersión más simple es el rango o amplitud. La amplitud (A) de un conjunto de datos es la diferencia entre las observaciones que tienen el mayor y el menor valor numérico en el mismo.

IDENTIFICA

Supóngase que en un hospital se toma la temperatura de cada paciente tres veces al día y que cierto día los registros de cuatro pacientes muestran los siguientes datos:

Paciente 1: 37°, 36°, 38°

Paciente 2: 36°, 40°, 38°

Paciente 3: 37°, 39°, 38°

Paciente 4: 41°, 37°, 36°

¿Cuál es la amplitud de temperatura para cada paciente?

Ten en cuenta

Para calcular la amplitud de los datos se debe identificar el valor más grande y el valor más pequeño del conjunto de datos y luego restarlos.

Algo esencial

La *dispersión de un conjunto de datos* es pequeña si los valores se agrupan en forma cerrada en torno a su media y es grande si los valores se dispersan ampliamente en torno a su media. Por tanto, la dispersión de un conjunto de datos se mide en términos de las cantidades en las cuales difieren los valores individuales de su media. Por ejemplo, en un conjunto de números:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

que constituyen una población con una media m, las diferencias entre ellas son:

$$X_1-\mu, X_2-\mu, X_3-\mu, \ldots X_N-\mu$$

y se les conoce como las *desviaciones de la media*, lo que sugiere que se podría usar el promedio de estas desviaciones como medida de dispersión en la población. A menos que las X sean todas iguales, algunas de las desviaciones serán positivas y otras negativas, entonces la suma de todas las desviaciones de la media se representa:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=0$$

y en consecuencia también su promedio es siempre *0*.

Una *medida de variación* se puede definir en términos de los valores absolutos de las desviaciones de la media. De esta manera, si se suman las desviaciones de la media como si fueran todas positivas o *0* y se dividieran entre n, se obtendría la media estadística o desviación media y se representa por:

$$D_{media}=\frac{|\bar{x}-x_1|+|\bar{x}-x_2|+|\bar{x}-x_3|+\ldots|\bar{x}-x_n|}{n}$$

CONSTRUYE

Analiza la información anterior y responde en tu cuaderno lo que se solicita a continuación.

1. Calcula la media aritmética de los siguientes datos referentes a las temperaturas de los pacientes: 37°, 36°, 38°, 36°, 40°, 38°, 37°, 39°, 38°, 41°, 37°, 36°
2. Calcula las diferencias de la media en cada dato.

DECIDE

Reflexiona tus respuestas anteriores y contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. Si escribimos en la fórmula los datos desordenados, ¿cambiaría el valor de la media? Argumenta tu respuesta.
2. ¿Cuál es el valor de la desviación media?
3. ¿Cuál es el rango de los datos?
4. Compara el valor del rango con el valor de la desviación media.

Ten en cuenta

La desviación media también se puede representar de la siguiente manera:

$$DM=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|X_i-\mu$$

COMUNICA

Comparte tus respuestas con tus compañeros y entre todos comenten cómo medirían la dispersión o separación de los datos que se estudiaron, tomando como referencia la media, además describan las diferencias que notan en las listas de datos de los cuatro pacientes. Escribe en el cuaderno las conclusiones a las que lleguen.

Profundizando

A continuación estudiaremos la gráfica de caja-brazos.

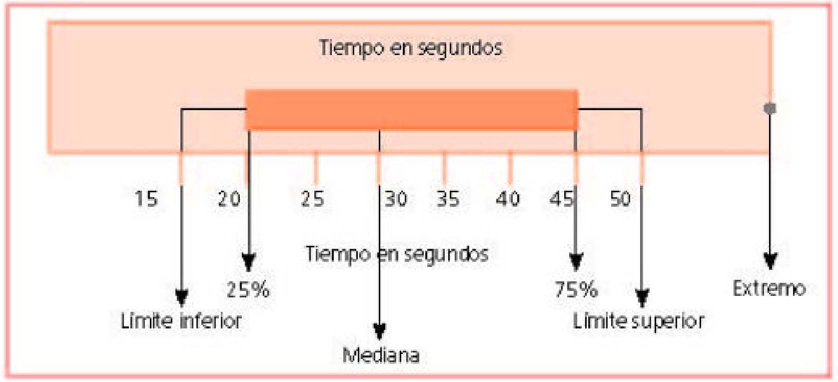
Este tipo de gráfica se emplea cuando es necesaria mayor información de la distribución de los datos; la ventaja que posee con respecto a los demás diagramas es que este gráfico tiene características como centro y dispersión de los datos, y la principal desventaja es que no ofrece ninguna información acerca de las frecuencias que presentan los datos.

Una gráfica de este tipo consiste en una caja rectangular, donde los lados más largos muestran el recorrido. Este rectángulo está dividido por un segmento vertical que indica dónde se posiciona la mediana (depende del paquete gráfico) y, por lo tanto, su relación con los valores que representan 25% y 75% (primero y tercero), donde el segundo valor es 50%, que coincide con la mediana; es decir, las gráficas de caja-brazo son muy útiles para hacer comparaciones.

Identifica lo anterior en la siguiente gráfica.

La variable medida en este caso es: tiempo en segundos para recorrer 100 m.

Esta caja se ubica a escala sobre un segmento que tiene como extremos los valores mínimo y máximo de la variable.



La información que se obtiene de esta gráfica es la siguiente:

El tiempo mínimo para recorrer 100 m para algunas personas es de 15 s, y el tiempo máximo para otras es de 49 s.

La mediana revela que la mayoría lo hizo en aproximadamente 29 s, lo que indica que la mitad tardó entre 15 y 29 s en recorrer los 100 m; mientras la otra mitad tardó entre 29 y 49 s.

A los 20 s el 25% recorrió los 100 m; el 50% lo hizo en 28 s, el 75% en 44 s y el resto de las personas a los 49 s.

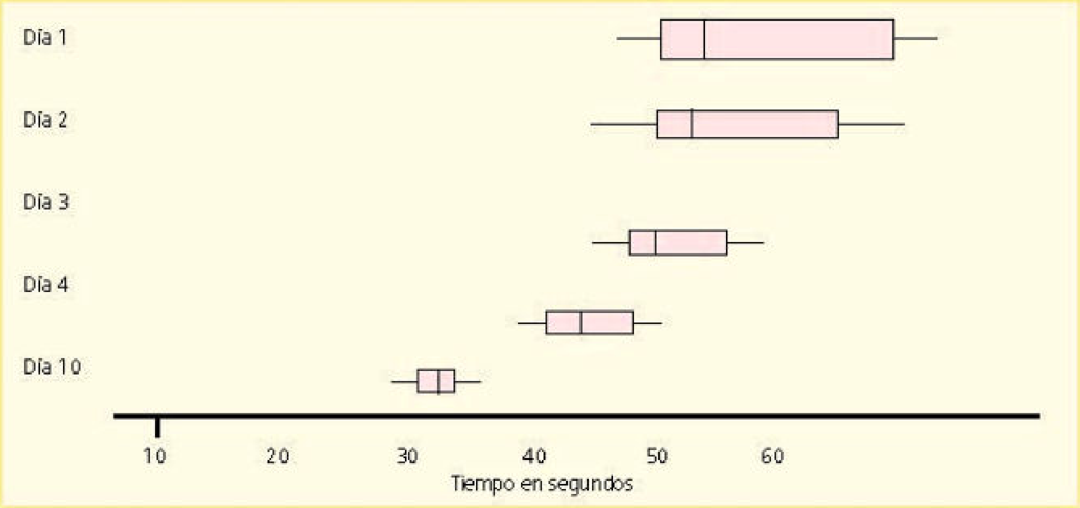
Para elaborar esta gráfica se sigue el procedimiento que se detalla a continuación:

- Se ordenan los datos de manera creciente.
- Se obtiene la mediana.
- Los datos se dividen en cuatro grupos; cada uno representa el 25% de la población estudiada.
- Se dibuja y marca un eje de medida horizontal.
- Se construye un rectángulo cuyo borde izquierdo está arriba del valor de 25% y el borde derecho arriba del valor de 75%.
- Se dibuja un segmento de recta vertical dentro de la caja arriba de la mediana.
- Se prolongan rectas desde cada extremo de la caja hasta las observaciones más lejanas que estén todavía a menos de 1.5 de los bordes izquierdo y derecho de los bordes correspondientes.
- Se dibuja un círculo para identificar cada observación extrema; éstas se llaman puntos inusuales extremos. Por ejemplo, si una persona recorrió los 100 m en 60 s como se observa en la gráfica.

Reflexionen con el grupo sobre esta manera de graficar y expresen sus dudas en orden y aportando ideas argumentadas.

Para verificar las ideas que se comentaron y analizaron, estudien esta situación:

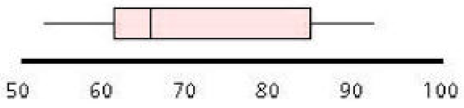
Supongamos que un corredor entrena para una determinada carrera y se toman los tiempos que necesita para recorrer los 100 m durante 10 días consecutivos (cada día se toman varios tiempos y se calcula mediana, valores 25% y 75%, valores mínimo y máximo).



Observa que el desplazamiento de las gráficas de caja-brazos hacia la izquierda indica que el entrenamiento ha dado resultado, ya que tarda menos en recorrer la misma distancia, siendo menor la diferencia entre el máximo y el mínimo y entre los valores del 25% y 75%.

Ahora practiquen en equipo lo aprendido con la siguiente situación y gráfica:

En un diario presentan el siguiente gráfico de caja-brazos. La variable en estudio es "calificación en un examen de ingreso".



Teniendo en cuenta esta gráfica indiquen en forma aproximada:

a) ¿Qué calificación obtuvo el estudiante con menor calificación?
b) ¿Qué calificación obtuvo el estudiante con mayor calificación?
c) ¿Cuál es el valor del 25% de la población?
d) ¿Cuál es el valor del 75% de la población?
e) ¿Cuál es la mediana?

Escriban cómo describirían esta información.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas, escribe tus ideas y dudas para plantearlas al grupo. Participa de manera crítica y respetuosa.

1. En un aeropuerto se registra el número de vuelos que arriban durante una semana determinada; los datos se vacían en la siguiente tabla:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Vuelos	25	37	45	50	32	40	30

Tabla 4.36

   a) Ordena en forma creciente y calcula la mediana y los valores 25% y 75%.
   b) ¿Cuántos vuelos hay el día que hay menos?
   c) ¿Cuántos vuelos hay el día que hay más?
   d) Representa esto mediante un diagrama de caja-brazos.
2. Una universidad tuvo 8, 3, 20, 5, 2, 8, 14, 2, 6, 10, 7, 15 solicitudes para ocupar 12 puestos diferentes.
   a) Ordena en forma creciente e indica la mediana y los valores 25% y 75%.
   b) Determina las cantidades mínima y máxima de solicitantes.
   c) Representa mediante una gráfica de caja-brazos.
   d) Interpreta la gráfica y saca conclusiones.
3. Cinco alumnos de un grupo de tercero ensamblaron un juego en 90, 70, 77, 82 y 118 minutos. Otro grupo de siete alumnos ensambló el mismo juego en 30, 35, 28, 33, 29, 26 y 36 minutos.
   Representa ambas situaciones mediante una gráfica de caja-brazos y da tus conclusiones.
4. Calcula las diferencias de la media, el rango y la desviación media para los siguientes datos: 2.68, 3.06, 4.31, 4.71, 5.71, 5.99, 6.06, 7.04, 7.17, 7.46, 7.50, 8.27, 8.42, 8.73, 8.84, 9.14, 9.19, 9.21, 9.39, 11.28, 15.19, 21.06.

Resumiendo

Las *medidas de dispersión* cuantifican la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central, es decir qué tan alejados o tan cercanos se encuentran la mayoría de los datos con respecto al valor representativo o media aritmética; en este sentido, cuanto mayor sea la desviación media, mayor será la dispersión de los datos.

Mientras más se acerque el valor a cero, más parecidos serán los resultados entre sí. Para el cálculo de la desviación media se emplea la fórmula:

$$D_{media} = \frac{|\bar{x}-x_1|+|\bar{x}-x_2|+|\bar{x}-x_3|+\ldots|\bar{x}-x_n|}{n}$$

Por lo tanto, la *desviación media* es la medida de los valores absolutos de las diferencias entre la media y los diferentes datos.

La *amplitud* o *rango* o *recorrido* es la medida de dispersión que se utiliza cuando la moda es la medida de tendencia central. Se calcula de la siguiente manera:

Amplitud o rango = (puntuación más alta) – (puntuación más baja)

Ésta se considera una medida muy inestable porque depende solamente de los dos valores extremos.

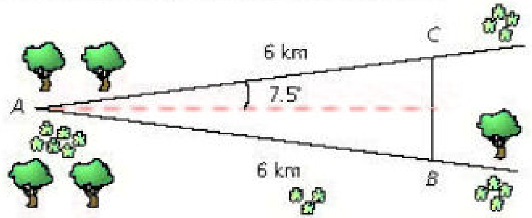
Reto

1. En la siguiente serie numérica determina los tres términos que siguen:
   2 6 10 14 …
   a) ¿Qué regla siguen?
   b) Exprésala algebraicamente.
2. Si las dos piernas de un compás forman un ángulo de 60° y cada pierna tiene 12 cm de longitud, halla el radio de la circunferencia que puede trazarse con estas características.
3. Se coloca en inversión un millón de pesos al 12% de interés anual.
   a) ¿Cuánto dinero se tendrá al cabo de 10 años?
   b) ¿En cuánto tiempo se duplicará?

Competencia matemática en acción

Haz la prueba

1. Traza en tu cuaderno un rombo. ¿Cuánto suman dos ángulos consecutivos en las diferentes posiciones? Razona la respuesta.
2. Dos hombres que caminan a razón de 3 km/h parten al mismo tiempo de un cruce de dos caminos rectos que forman entre sí un ángulo de 15°. Los dos van en el mismo sentido. ¿A qué distancia mutua se encontrarán al cabo de 2 h?



3. Calificaciones en un examen. Los datos que enlistamos a continuación corresponden a las calificaciones obtenidas en Matemáticas por un grupo de 32 estudiantes (datos ficticios).

57	63	86	82	45	96	60	65
77	74	100	37	64	71	82	51
42	93	88	89	46	70	73	60
60	65	47	78	68	59	78	75

Tabla 4.37

   a) ¿Cuál es la calificación promedio del grupo?
   b) ¿Qué proporción de estudiantes obtuvieron una calificación superior al promedio? ¿Qué proporción obtuvo una calificación inferior al promedio?
   c) Si la calificación aprobatoria es de 60, ¿qué proporción de estudiantes aprobó el curso?
   d) Agrupa los datos y construye una tabla y una gráfica de frecuencias para visualizar cómo se distribuyen las calificaciones de los estudiantes.

★ ★ INFORMATIVO MATEMÁTICO ★ ★

Ciencia

Contaminación matemática

En el siglo XVII se contaban apenas 17 revistas que contenían algunos artículos sobre matemáticas. En el siglo XVIII, con el desarrollo del análisis infinitesimal, se contaron hasta 210 revistas que hablaban, a veces, de matemáticas. El número llegó a 950 en el siglo XIX, y a finales de ese siglo empezaron a aparecer las primeras revistas especializadas en matemáticas.

Quizás ese fenómeno no debiera llamarse contaminación de ideas; es probablemente un reflejo de la prodigalidad de la naturaleza, que produce millones de especies diferentes de insectos. Sin embargo, tenemos la sensación de que esa tendencia va en contra de los ideales básicos de la ciencia que trata de entender, unificar, simplificar y en particular, desarrollar un sistema de notación para los fenómenos de la mente y de la naturaleza.

Historia

El lenguaje de las matemáticas

Los matemáticos babilonios, egipcios, griegos, hindúes y árabes escribían las matemáticas en sus propios idiomas y progresaron muy lentamente. En el siglo XVI de nuestra era, cuando los matemáticos tuvieron que resolver problemas cada vez más complicados planteados por el desarrollo de la ciencia y del comercio, el simbolismo y el uso generalizado de las variables empezó a invadir las matemáticas y a cambiar su lenguaje; éste fue un momento clave en la historia de las matemáticas.

Alfred North Whitehead (Inglaterra 1861-1947) dice en su *An Introduction to Mathematics* (1911): "Gracias al simbolismo avanzado en el razonamiento casi mecánicamente, sólo con la mirada; sin él tendríamos que utilizar centros más especializados del cerebro. Una buena notación nos libera del trabajo innecesario y nos permite concentrarnos en los aspectos más difíciles de los problemas".

Caso curioso

El siguiente es uno de los problemas que propusieron a Fibonacci en un torneo matemático ante su emperador. Investiga sobre este personaje.

"Encontrar un número cuyo cuadrado, aumentado o disminuido en 5, siga siendo un cuadrado".

La solución encontrada por Fibonacci fue:

$$\frac{1681}{144}=\left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Puesto que $\frac{1681}{144}-5=\frac{961}{144}=\left(\frac{31}{12}\right)^2$ y

$$\frac{1681}{144}+5=\frac{2401}{144}=\left(\frac{49}{12}\right)^2$$

Reflexiona sobre esta solución e intenta proponer otra.

Evaluación tipo PISA

Diferencia de cuadrados

4.1 Dos números consecutivos a y b, la diferencia de los cuadrados de estos números la escribimos:

$a^2 - b^2$

Por ejemplo: $3^2 - 2^2$
$4^2 - 3^2$
$5^2 - 4^2$

Nivel 1) Calcula el valor de las diferencias anteriores.
Nivel 2) Descubre las regularidades de las siguientes expresiones.
$3^2 - 2^2 = 1 + 2 + 2 = 1 + 2 \cdot 2$
$4^2 - 3^2 = 1 + 3 + 3 = 1 + 2 \cdot 3$
$5^2 - 4^2 = 1 + 4 + 4 = 1 + 2 \cdot 4$

Nivel 3) Escribe esta regularidad en una expresión algebraica.

La geometría de un vaso

4.2 A diario lo utilizamos para beber algún líquido, los hay cilíndricos, cuadrangulares, de vidrio, plástico, papel o de algún otro material y forma, se llaman vasos.
Un vaso con forma de tronco de cono tiene de radio en su base mayor 8 cm, el radio de la base menor 3 cm y la altura es de 14 cm.
Nivel 1) Determina el valor de la generatriz.
Nivel 2) Determina el volumen y el área total.
Nivel 3) Traza un desarrollo plano de este cuerpo.

El automóvil

4.3 En esta tabla se representa el costo promedio de un automóvil en los últimos años en México.

t (años)	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$ costo	60,000	74,500	89,000	93,500	108,000	122,500	

Tabla 4.38

Nivel 1) Suponiendo que el costo se incrementa como se representa en la tabla, ¿cuál será el costo del automóvil en el año 2009? Realiza la gráfica de t contra $.
Nivel 2) Determina la expresión que modela la situación.
Nivel 3) Determina la razón de cambio.

Un estudio sobre bicicletas

4.4 En el estado de Hidalgo la fábrica de bicicletas Campanita realiza un estudio sobre el uso de la bicicleta y si los resultados son favorables abrirá una tienda; para ello en la carretera principal se registra el número de veces que pasan bicicletas por la caseta de cobro y los datos se vacían en la siguiente tabla:

Día	L	M	M	J	V	S	D
Bicicletas	45	25	60	30	50	55	20

Tabla 4.39

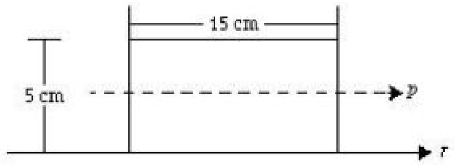
Nivel 1) Ordena en forma creciente y calcula la media.
Nivel 2) Calcula el rango y la desviación media.
Nivel 3) Representa esta situación en un diagrama de caja-brazos.

Autoevaluación

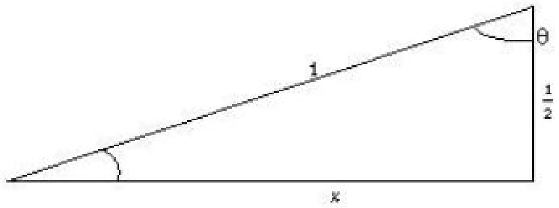
Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

REALIZA

1. La siguiente figura hazla rotar sobre su base en el eje r.
   a) Determina el volumen de ese cuerpo.
   b) Considera el eje p que divide el rectángulo por la mitad y determina el volumen de ese cuerpo.



2. Dado el siguiente triángulo rectángulo, determina el valor de x y θ.



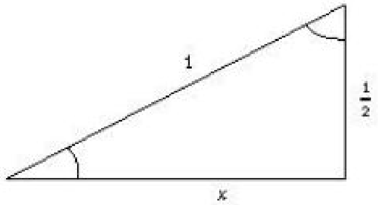
3. La siguiente tabla representa el cambio de temperatura de una taza de café a lo largo del tiempo.

t(min)	0	3	6	9	12
T(°C)	62	53	40	36	22

Grafica esta función, e indica de qué tipo es y explica por qué.

APLICA

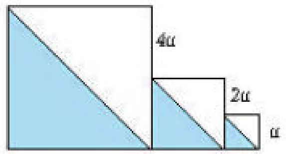
1. Si x es cualquier número, entonces $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$
   Determina $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ y $f(x+1)$
2. Determina las razones trigonométricas para el ángulo de 30° y 60° tomando en cuenta la siguiente figura.
   Sen 30° = Sen 60° =
   Cos 30° = Cos 60° =
   Tan 30° = Tan 60° =



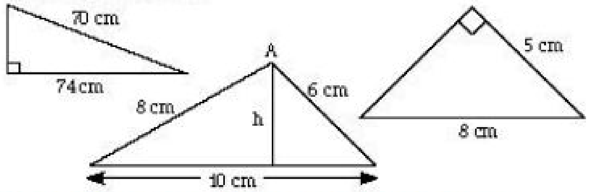
3. Realiza la gráfica de una función que cumpla con que:
   a) siempre sea creciente.
   b) siempre sea decreciente.

REFLEXIONA

1. Calcula el área de la región de color oscuro teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del anterior.



2. Calcula el valor de los ángulos y el lado que falta en cada triángulo rectángulo.



3. Determina la desviación media de los siguientes datos.

a)

No. de libros	1	2	3	4	5	6	7
No. de personas	5	12	18	11	7	4	1

b)

Edad (años)	(0-2)	(2-4)	(4-6)
No. de niños	5	12	18

c)

x_i	0	5	8	12	15	20	25
f_i	2	3	5	3	4	2	1

Glosario

COSENO. En un triángulo rectángulo, es la longitud del lado adyacente dividida por la longitud de la hipotenusa.

DISPERSIÓN. Grado de distanciamiento de un conjunto de valores respecto a su valor medio.

ENÉSIMO TÉRMINO. Palabra que expresa el término general (término n.) de una serie o de una progresión indefinidas.

FUNCIÓN LINEAL. Función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta.

PENDIENTE DE UNA RECTA. La inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal. Suele estar representada por la letra m, y está definida como la diferencia en el eje Y dividido por la diferencia en el eje X para dos puntos distintos en una recta.

RANGO. El conjunto de todos los valores de salida de una función. La diferencia entre el menor y el mayor valor.

RAZÓN DE CAMBIO. Magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra.

RAZON TRIGONOMÉTRICA. Razón de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Las tres razones trigonométricas básicas son el seno, el coseno, y la tangente. Éstas se abrevian como sen, cos y tan, respectivamente.

SENO. En un triángulo rectángulo, es la longitud del lado opuesto dividido para la longitud de la hipotenusa.

SUCESIÓN. Conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números.

TANGENTE. En un triángulo rectángulo, es la longitud del lado opuesto dividido para la longitud del lado adyacente.

Bloque 5

La visualización constituye un tema general con implicaciones en diversos aspectos de nuestras vidas. Posee una importancia determinante para las matemáticas en su conjunto y esto ha sido así en el curso de la historia. Los matemáticos consiguieron un gran avance con la invención de los numerales, que son representaciones visuales de los números, por ejemplo.

Obviamente, la visualización es importante en el estudio de la forma, pero también para las matemáticas en su conjunto para estudiar el cambio es necesario que lo veamos, para estudiar datos examinamos varias representaciones gráficas y propiedades e interpretamos con los diagramas y modelos.

Pero es tan falso que sepamos como "ver" instintivamente como la supuesta capacidad instintiva para nadar. La visualización es una herramienta que debe cultivarse para su uso cuidadoso e inteligente.

Aprendizajes esperados

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

Resuelvas y **plantees** problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.

Resuelvas problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipes cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

Leas y **representes**, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.

Resuelvas problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Ideas clave

Plantea problemas relacionados con la vida diaria y científicos, participando y ayudando en la resolución de los mismos y valorando las habilidades matemáticas para argumentar las situaciones que requieren su empleo.

Comunica y **representa** gráficamente los problemas mostrando sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos fomentando el trabajo en grupo.

Saca conclusiones de las investigaciones en internet u otros medios tomando decisiones adecuadas acerca de ellas y contribuyendo al desarrollo personal y de los demás.

Dosificación Bloque 5

Semana	Tema	Subtema	Aprendizajes esperados
		Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico	
32	Patrones y ecuaciones	5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	1. Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
		Eje: Forma, espacio y medida	
33	Medida	5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	
34		5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	
35		5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	2. Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
		Eje: Manejo de la información	
36	Proporcionalidad y funciones	5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	3. Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
	Nociones de probabilidad	5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	4. Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
37	Evaluación tipo PISA		
37	Autoevaluación		

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN
Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Repasa tus conocimientos

Contesta en tu cuaderno.

1. En el patio de una escuela se dispone un área para una pequeña cancha de futbol. El largo de la cancha excede en 4 m al ancho. El director determina que si pudieran aumentar 4 m a cada una de las dimensiones, el área se duplicaría. ¿Cuáles son las dimensiones originales de la cancha?
2. Si se hace un corte paralelo a la base de un cono, se obtiene la siguiente figura:

a) b) c) d)

3. Efectuando cortes paralelos a la base del cono se puede determinar:
   a) La generatriz del cono.
   b) La altura del cono.
   c) La relación entre la altura y el radio de la figura obtenida.
   d) La relación entre la generatriz del cono y su altura.
4. El volumen del cono se puede obtener tomando como referencia:
   a) El volumen de la pirámide.
   b) El volumen del prisma.
   c) El volumen del cilindro.
   d) El volumen del cubo.
5. Un cono de helado tiene 3 cm de diámetro en su base y una altura de 10 cm. ¿Qué volumen de helado puede contener si se llena al ras?
6. En una prueba de laboratorio se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla. ¿Qué tipo de variación se presenta?

Tiempo (s)	2	3	4
Distancia (m)	4	9	16

Tabla 5.1

   a) Lineal.
   b) Aritmética.
   c) Cuadrática.
   d) Inversamente proporcional.
7. Se lanza un dado y se gana si sale el número elegido. ¿Es un juego justo?
8. En una caja se colocan cinco canicas de diferentes colores. La probabilidad de sacar una canica verde es:
   a) Menor a $\frac{1}{6}$.
   b) Poco probable.
   c) Equiprobable.
   d) Un evento dependiente

Comenta tus respuestas con el grupo y registra tus conclusiones en el cuaderno. De esta manera, al finalizar el estudio de este tema podrás valorar tus avances.

Explora en internet

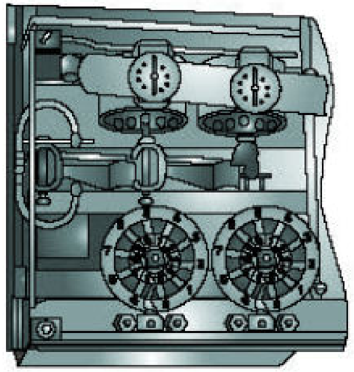
Visita la siguiente página:
http://avanzaenlinea.com/naturaleza-de-las-raices-de-una-ecuacion
En este sitio aprenderás acerca de la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Patrones y ecuaciones

5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

A lo largo de la historia los científicos han tratado de liberarse de las tareas de cálculo manuales y repetitivas. Con este objetivo, y en relación con la resolución numérica de ecuaciones y sistemas, comenzaron a fabricarse en el siglo XVI las máquinas de calcular. En la figura puede observarse una de las primeras, la máquina de Pascal.



IDENTIFICA

La resolución de ecuaciones, como sabes, se obtiene cuando encontramos el valor de la o las incógnitas.

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x - 1 = 9$
b) $2x = 10$
c) $x + 3 = 4$
d) $3x + 1 = 7$
e) $1 - x = 10$
f) $2x + 4 = 0$

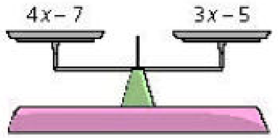
CONSTRUYE

Responde lo que se solicita a continuación:

1. ¿Qué procedimiento empleaste para resolverlas?
2. Comenta con tus compañeros tu estrategia.
3. En equipo, a partir de estas ecuaciones planteen problemas. Expónganlos al grupo.

IDENTIFICA

Observa la balanza:



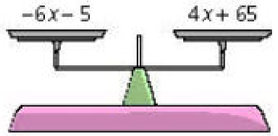
Encuentra el valor de la incógnita x, tal que la balanza:

a) se incline a la derecha.
b) se incline a la izquierda.
c) consiga el equilibrio.

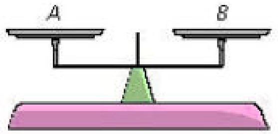
CONSTRUYE

Analiza el ejemplo anterior y explica

1. ¿Para qué valor de x la balanza está equilibrada?



2. ¿Qué tipo de ecuaciones se utilizan en las situaciones anteriores?
3. ¿Qué procedimiento empleaste para resolverlas?
4. Observa la siguiente balanza:



   a) Escribe una expresión algebraica con una variable en A y otra en B para que la balanza esté equilibrada.
   b) ¿Qué harías para que esta balanza se incline hacia la izquierda?

5 En la ecuación $8x - 6 = -5x + 20$ realiza las transformaciones que se indican.
a) Suma $5x$ a los 2 miembros:
b) Suma 6 a los 2 miembros:
c) Divide entre 13 los 2 miembros:
d) ¿Cuál es la solución de la ecuación?

DECIDE

Resuelve los siguientes problemas.
1 Escribe con una sola incógnita las ecuaciones siguientes:
a) Un número más su doble más su mitad suman 21.
b) Los cuadrados de dos números consecutivos se diferencian en 15.
c) La mitad más la cuarta parte de un número suman 13 unidades más que el tercio más la quinta parte del mismo número.
2 Presenta tus respuestas al grupo y justifícalas. Valoren la opinión de los demás.

IDENTIFICA

Entre las ecuaciones incompletas de segundo grado más sencillas se encuentran las de la forma $x^2 = n$, donde n representa un número. Todas pueden resolverse mentalmente.

Por ejemplo:
$x^2 = 4$, sus soluciones son $x = 2$, $x = -2$.
$x^2 = 9$, sus soluciones son $x = 3$, $x = -3$.

¿Qué dificultades encontraste para hallar la solución?

CONSTRUYE

Contesta lo siguiente:
1 Resuelve estas ecuaciones mentalmente.
a) $x^2 = 1$
b) $x^2 = 16$
c) $x^2 = 49$
d) $x^2 = 36$
e) $x^2 - 25 = 0$
f) $x^2 - 100 = 0$

2 Escribe el procedimiento para resolver estas ecuaciones.
a) $5x^2 = 0$
b) $x^2 - 4 = 0$
c) $3x^2 - 27 = 0$
d) $10x - 2x^2 = 0$

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y responde en tu cuaderno lo siguiente:
1 ¿Cuáles fueron tus estrategias para resolver las ecuaciones anteriores?

COMUNICA

Forma equipo con dos compañeros y planteen problemas que deban resolverse con estas ecuaciones. Compartan su trabajo con sus compañeros. Si tienen dudas consulten a su profesor.

IDENTIFICA

Planteen en grupo la solución de las ecuaciones siguientes:
a) $x^2 - 16x + 15 = 0$
b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$
c) $x^2 + 6x + 5 = 0$
d) $(x + 2)(x - 2) = 0$

CONSTRUYE

Reflexionen los procedimientos que usaron para resolver las ecuaciones y respondan en sus cuadernos lo que se solicita a continuación:
1 Completen la tabla para conocer los valores que se obtienen de las ecuaciones de los incisos a y b del ejercicio anterior.
Por ejemplo:
$y = x^2 - 16x + 15$

x	-2	-1	0	1	2
y					

Tabla 5.2

¿Qué tipo de relación hay entre los datos de la tabla y la solución de la ecuación? Argumenta tu respuesta.
2 El valor de y es 0 para un valor de x que está entre 0 y 1. Encuentra el valor de x, con una cifra decimal, que dé el valor de y más cercano a 0.
3 Traza la gráfica de las ecuaciones de los incisos c y d. ¿En qué valores se tiene que $y = 0$? ¿Qué relación hay con la solución algebraica?
4 Resuelvan en equipo los siguientes problemas, explicando paso a paso su estrategia y el teorema que emplearon. Preséntenla al grupo.
a) Encuentren las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base mide b centímetros, su altura $\frac{1}{3}b$ centímetros y su área es igual a 48 cm^2.
b) Un campo de futbol mide 80 m de ancho y 110 m de largo. Determinen la máxima distancia que se puede recorrer sin cambiar de dirección.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y resuelve los siguientes problemas en equipo, escuchando con respeto las opiniones de tus compañeros, promoviendo un trabajo limpio y ordenado.
1 El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 m, y la hipotenusa, 1 m más que el otro cateto. ¿Cuánto miden la hipotenusa y el otro lado?
2 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 70 cm y la hipotenusa 29 cm. Halla los catetos.
3 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 60 cm y el cateto menor tiene 16 cm menos que la hipotenusa. Halla los valores de los lados.
Resuelve individualmente los siguientes problemas y presenta las soluciones y estrategias al grupo participando y enriqueciendo lo expuesto.
4 La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y el perímetro 68 cm. Halla los lados del rectángulo.
5 En un círculo de 25 cm de diámetro se inscribe un rectángulo cuyos lados difieren 17 cm. Halla la medida de los lados.
6 Una escalera se apoya en una pared. ¿Cuál es la longitud de la escalera cuando su extremo inferior se aleja 9 m de la pared y el extremo superior desciende 3 m?

COMUNICA

Compara tus resultados con los de tus compañeros. Expón en cada caso qué tipo de ecuaciones planteaste para la solución de los problemas y el método que utilizaste para resolverlas. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

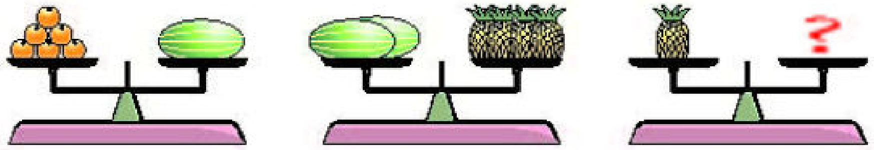
Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

Algunos problemas requieren el planteamiento de dos o más ecuaciones simultáneas para resolverlos y se les conoce como sistemas de ecuaciones. Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones.

Formen equipos de tres y resuelvan las siguientes cuestiones. Comuniquen a sus compañeros a qué conclusiones llegaron.

1. ¿Cuántas naranjas hacen falta para equilibrar las balanzas?



¿De qué manera se relaciona la información de las balanzas?

2. La suma de dos números x y y es 8.
   a) Completen la tabla.

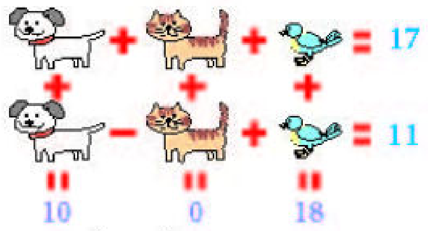
x	1	2					7
y	7	6					

Tabla 5.3

   b) Si x fuera el triple de y, ¿cuántos números comprobarían ambas condiciones? ¿Cómo se plantean las ecuaciones y qué importancia tienen?

3. Dos boletos de adulto y uno de niño cuestan \$51. Cuatro boletos de adulto y tres de niño cuestan \$115.
   ¿Cuánto cuestan los boletos?
   a) 4 de adulto y 2 de niño. b) 6 de adulto y 4 de niño.
   c) 2 de adulto y 3 de niño. d) 3 de adulto y 5 de niño.
   e) 1 de adulto. f) 1 de niño.
   ¿De qué manera plantearon las ecuaciones? ¿Cómo les ayudan en la solución?

4. En una tienda de mascotas hay perros, gatos y pájaros. ¿Cuántos perros, gatos y pájaros hay?



¿Cómo les ayuda la representación a reflexionar?

IDENTIFICA

Resolución de un sistema por tablas

Estudia la forma en que se resuelve el siguiente problema y resume el procedimiento; después, coméntalo con tus compañeros y escríbelo.

Un hotel tiene habitaciones individuales (con una cama) y habitaciones dobles (con dos camas). En total hay 23 habitaciones y 40 camas. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Si i es el número de habitaciones individuales y d el de habitaciones dobles, ¿mediante qué sistema de ecuaciones puede expresarse esta información?

Tratemos de resolverlo; esto es, de hallar sus soluciones.

Buscamos las soluciones ayudándonos de una tabla. Si damos valores, por ejemplo, a i, entonces a partir de ellos podemos obtener los correspondientes valores de d y de $(i + 2d)$:

i (habitaciones individuales)	1	2	3	4	5	6	7	...
d (habitaciones dobles)	22	21		19		17		...
$i + 2d$ (camas)	45	44		42			39	...

Tabla 5.4

Responde lo siguiente:
a) ¿Cuántas habitaciones individuales?
b) ¿Cuántas habitaciones dobles?
c) Escribe el procedimiento que empleaste para hallar la solución del problema anterior.

CONSTRUYE

Resuelve en tu cuaderno.

1. Utiliza el método que dedujiste y resuelve el siguiente problema. Comenta con tus compañeros tus hallazgos.
   a) Por un helado y una paleta pagué \$9. Mis amigos pagaron \$20 por dos helados y tres paletas iguales a los míos. Por cada artículo se pagó un número entero de pesos. ¿Cuál es el precio de cada uno?
2. Plantea un problema semejante a los estudiados en esta lección y resuélvelo como un sistema de ecuaciones. Elabora las tablas correspondientes.

Diversas son las situaciones en las que se pueden utilizar ecuaciones, la compra de helados es sólo un ejemplo.

COMUNICA

Presenta al grupo tus respuestas. Resuelve los que propongan tus compañeros y hazles aportaciones. En caso de tener dudas consulta a tu profesor.

3. El procedimiento para resolver un sistema de tablas es el siguiente, complétalo.
   1° se dan valores a ...

   2° se establecen...

   3° se despeja la otra...

   4° se sustituyen...

   5° se obtiene la solución cuando...

DECIDE

En equipo resuelvan lo siguiente, compartiendo sus estrategias personales.

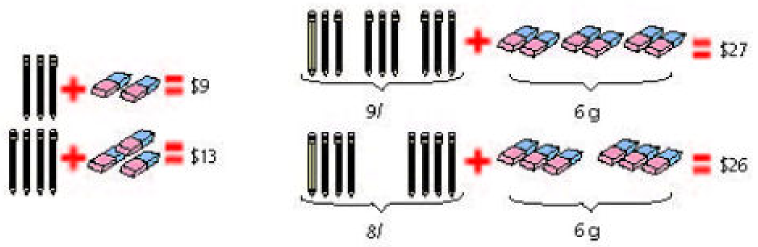
1. Determinen mediante una tabla cinco soluciones enteras positivas para cada una de las ecuaciones.
   a) $y = 2x + 1$
   b) $y = x + 4$
2. Indiquen cuál es la solución del siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x \quad y = -4 \end{cases}$$
3. Resuelvan el siguiente sistema mediante tablas:
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 17 \end{cases}$$
4. Resuelvan el siguiente sistema mediante tablas:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
5. Olga y Ángel tienen tres hijos pequeños y a veces van al museo (el precio de la entrada es diferente para adultos y niños). Por las entradas de Olga y uno de sus hijos pagaron \$17. Por la entrada de los cinco pagaron \$41. Planteen el sistema correspondiente y calculen, por tablas, cuánto cuesta la entrada de los adultos y cuánto la de los niños.
6. Una estampa cuesta \$2 y un póster \$13. ¿Cuántas estampas y pósters pueden comprar exactamente con \$32?

Profundizando

Resolución de un sistema por reducción

Para entender este método es necesario que reflexiones cada paso y que anotes tus dudas para que las soluciones en grupo.

Iván compró tres lápices y dos gomas por \$9, y María compró cuatro lápices y tres gomas por \$13, ¿cuánto cuestan cada lápiz y cada goma?



Observando el dibujo se ve que cada lápiz cuesta \$1 y sustituyendo en la primera ecuación:

$3 + 2g = 9$

luego 2 gomas cuestan \$6. Cada goma cuesta \$3.

Para escribir en resumen el método de resolución de un sistema por reducción, completa algebraicamente cada una de las indicaciones siguientes.

Método de reducción

1. Sistemas con coeficientes iguales u opuestos

Ejemplo $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$

   a) Eliminamos x restando las ecuaciones:
   b) Resolvemos la ecuación resultante:
   c) Sustituimos $y = -1$ en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la primera, y calculamos el valor de x:
   d) ¿Cuál es la solución del sistema?

2. Sistemas con coeficientes distintos

Ejemplo $\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 7x - 6y = 32 \end{cases}$

   a) Hacemos que los coeficientes, por ejemplo de y, sean iguales:
   m.c.m. (4, 6) =
      - Multiplicamos la primera ecuación por 3:
      - Multiplicamos la segunda ecuación por 2:
   b) Sumamos las dos ecuaciones:
   c) Resolvemos la ecuación:
   d) Sustituimos x en una de las ecuaciones:
   e) ¿Cuál es la solución del sistema?

Ten en cuenta

Método de reducción

1o. Si los coeficientes de una incógnita son iguales (u opuestos), se restan (o suman) las ecuaciones para eliminarla. Si no lo son, se utiliza la regla del producto para que tenga como coeficiente común de una incógnita a su m.c.m.

2o. Una vez eliminada una incógnita, se resuelve la ecuación resultante.

3o. Se calcula la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones.

DECIDE

Analiza las actividades anteriores y resuelve lo que se solicita a continuación.

1. Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y resuelve por el método de reducción.

2. Haz la descomposición del número 32 en dos partes tales que dividiendo una por otra se obtenga por cociente 5 y por residuo 2.
3. Se requiere distribuir un lote de libros entre los estudiantes de una clase. Si a cada uno se le dieran 3, sobrarían 17 libros, pero si a cada uno se le entregaran 4, entonces faltarían 8 libros. ¿Cuántos alumnos y cuántos libros hay?
4. En un mercado el costo de 5 plátanos y 2 kiwis es de \$14, y el de 10 plátanos y 6 kiwis es de \$33. ¿Cuánto cuesta cada plátano y cada kiwi?
5. Raquel trabajó 5 días y Sergio 4 y entre los dos cobraron \$4 260. A la semana siguiente cobraron \$3700 y trabajaron 3 y 5 días, respectivamente. ¿Cuánto gana por día cada uno?

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas, compara tus procedimientos y estrategias con tus compañeros, escucha con respeto las explicaciones.

1 Indica cuáles son los coeficientes y los términos independientes de las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ x = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$

2 Dado el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = 14 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

Indica cuál de los siguientes pares de números es su solución.

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

3 Resuelve el siguiente sistema por tablas:

$$\begin{cases} x = y + 7 \\ -x - 5y = -25 \end{cases}$$

4 En una granja hay cerdos y gallinas. Si las balanzas están en equilibro, plantea las ecuaciones y encuentra mediante tablas la masa de cada cerdo y de cada gallina.

5 Resuelve el siguiente sistema por tablas:

$$\begin{cases} x - 6y = -2 \\ 10x - 4y = 1 \end{cases}$$

6 Resuelve el siguiente sistema por tablas:

$$\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

7 Resuelve el siguiente sistema por reducción:

$$\begin{cases} 10x - 7y = 25 \\ 6x - 11y = 49 \end{cases}$$

8 Resuelve el siguiente sistema por reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = -9 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

9 El perímetro de un rectángulo mide 60 centímetros. Si sabemos que el lado mayor es el doble del lado menor, calcula las dimensiones del rectángulo.

10 Una hamburguesa y un jugo cuestan \$28 y dos hamburguesas y tres refrescos cuestan \$64. Calcula el precio de cada alimento.

11 Encuentra dos números sabiendo que se diferencian en seis unidades y uno de ellos es el doble del otro.

12 Resuelve, si es posible, el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

13 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $(x + 5)^2 + 3 = (x + 1)^2 + 4^3$? Justifica tu respuesta.

Resumiendo

Para solucionar problemas lo más importante es lograr traducirlos a expresiones algebraicas y formar con ellas una ecuación. Una *ecuación* es una igualdad en la que los términos contienen variables y coeficientes en forma de expresiones algebraicas.

La solución de las ecuaciones se obtiene una vez que se encuentra el valor de la o las incógnitas.

Algunos problemas requieren el planteamiento de dos o más ecuaciones simultáneas para resolverlos y se les conoce como *sistemas de ecuaciones*.

Un sistema de ecuaciones lineales es un grupo de ecuaciones que representan líneas *rectas*.

Para desarrollar un sistema de ecuaciones existen varios métodos de solución, entre ellos:

Método de igualación. Consiste en despejar de las ecuaciones dadas la misma variable e igualarlas para obtener una ecuación con una incógnita.

Método de sustitución. Consiste en despejar cualquiera de las incógnitas de una de las ecuaciones dadas y reemplazar el valor encontrado en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una sola incógnita.

Método de reducción. Se igualan los coeficientes de una de las dos incógnitas de las ecuaciones dadas, para que al sumar algebraicamente estas ecuaciones se elimine una variable, y luego obtener una ecuación con una sola incógnita.

Método de tablas. Se asignan arbitrariamente valores a una de las incógnitas de las ecuaciones; luego se despeja la otra incógnita de una de las ecuaciones, y se calculan sus valores correspondientes. Se sustituyen los dos valores en la segunda ecuación. La solución se obtiene al conseguir una igualdad numérica para la segunda ecuación. Cabe aclarar que este procedimiento sólo debe utilizarse si las soluciones son números naturales pequeños.

Método gráfico. Cada una de las ecuaciones se convierte a la forma general $y = mx + b$, elaborar una tabla y asignar valores arbitrarios a x y se sustituyen en las ecuaciones para obtener los valores de y. Se grafican ambas ecuaciones utilizando las parejas de números y donde se cruzan las rectas ese punto es la solución del sistema de ecuaciones.

Medida

5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

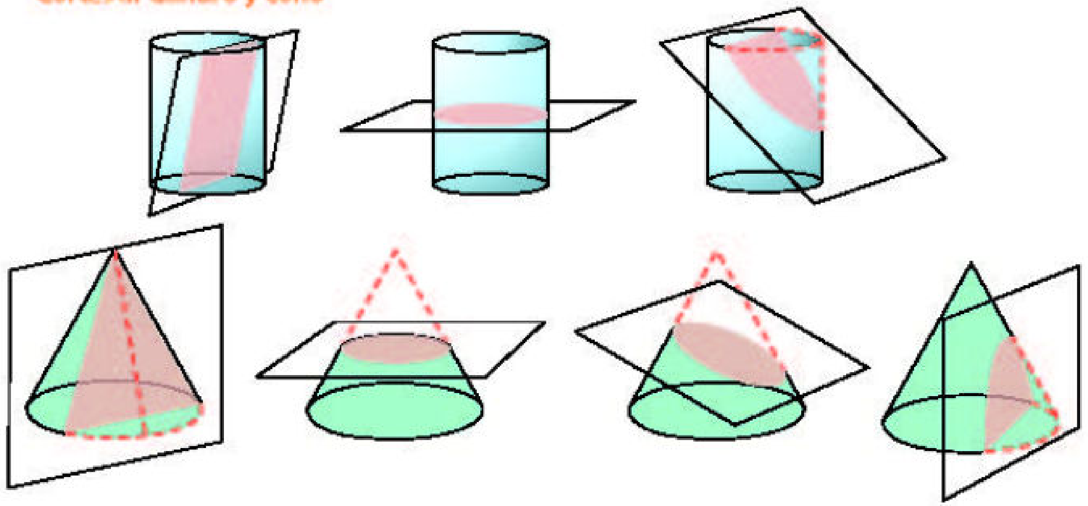
¿Has notado que la mayoría de los objetos que a diario utilizas son cilíndricos y cónicos?, ¿y que con frecuencia se requiere conocer el espacio que encierran o la cantidad de material sólido o líquido que pueden contener? La capacidad para considerar e interpretar los datos multidimensionales que nos rodean puede ser uno de los mejores regalos para desarrollar nuestra imaginación y la manera en que vemos las cosas que nos rodean.

IDENTIFICA

Para experimentar qué formas se obtienen al hacer cortes en cuerpos sólidos realiza lo siguiente:

- Modela con plastilina cilindros y conos. También puedes hacerlo con cuerpos de plástico o con aquellas formas que encuentres en casa.
- Haz cortes como los siguientes:

Cortes al cilindro y cono



- ¿Qué formas se obtuvieron al realizar los cortes?

CONSTRUYE

Analiza las figuras que obtuviste y responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. ¿Qué forma se obtiene si realizas cortes paralelos al que hiciste primero? ¿Es el mismo? Explica sin realizar los cortes.
2. Ahora verifica tu respuesta realizando los cortes.
3. Presenta maquetas en las que expliques tus hallazgos y conclusiones.

DECIDE

Analiza y reflexiona la información que obtuviste en la actividad anterior. Contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. ¿Qué otros cortes puedes hacer?

COMUNICA

Compara tus anotaciones con tus compañeros y, si no coinciden, traten de ponerse de acuerdo y obtener conclusiones. Pidan ayuda a su profesor si es necesario.

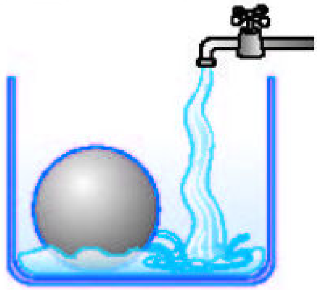
Manejo de técnicas con eficiencia

En nuestro estudio sobre cuerpos redondos vamos a continuar con el cono recto y la esfera.
En equipo organicen el trabajo del que tendrán que dar un informe con los siguientes apartados:

- **Representación.** Descripción paso a paso del procedimiento, con dibujos.
- **Ideas previas.** Las suposiciones y propuestas durante el desarrollo de la actividad.
- **Justificación.** Explicación con datos y su tratamiento.
- **Conclusiones.**

Es necesario que tengan dos conos, uno de papel y otro sólido, y dos esferas, así como un recipiente transparente y agua o arena fina.

1. Coloquen el cono de papel con la base hacia arriba y viertan agua o arena en diferentes niveles, como se puede ver en la figura.
   a) ¿Qué forma se genera en la superficie del líquido o de la arena a diferentes niveles?
   b) ¿Obtendrían el mismo resultado si realizaran cortes paralelos a la base?
2. Coloquen la esfera en el interior del recipiente y viertan agua poco a poco, como se muestra en la figura.
   a) ¿Qué forma se genera por la intersección de la superficie del agua con las paredes de la esfera?
   b) Si realizan cortes paralelos entre sí a un sólido esférico, por ejemplo una naranja, ¿podrían comprobar sus apreciaciones?
3. Con base en lo experimentado obtengan los datos necesarios para contestar lo siguiente:
   a) Para el cono, ¿qué gráfica representa la relación entre el nivel del agua o arena y el radio del círculo correspondiente a cada corte?
   b) ¿Cuál es la característica del corte que permite obtener el círculo de mayor radio?



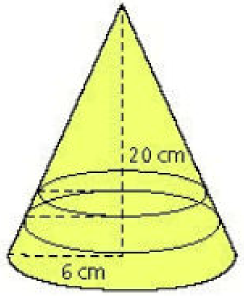
IDENTIFICA

Formen equipos de dos o tres alumnos y realicen lo que se pide a continuación.

1. El cono que se muestra enseguida tiene una altura de 20 cm y un radio de 6 cm en la base. Si se hacen cortes paralelos a la base, a cada centímetro de altura, ¿cuánto medirá el radio de cada círculo formado por los cortes? Para averiguarlo completen la siguiente tabla.

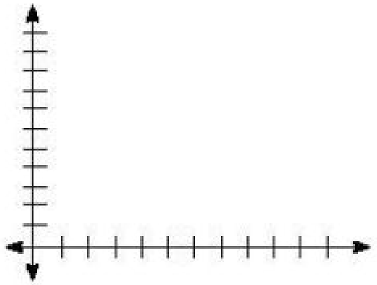
h (altura del cono en cm)	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
r (radio de la base en cm)	6										

Tabla 5.5



CONSTRUYE

Copia en tu cuaderno un plano cartesiano como el que se muestra a continuación, y traza junto con tus compañeros de equipo la gráfica que representa la relación entre las diferentes alturas del cono que se obtienen al hacer cortes paralelos a su base, y el radio de los círculos que se forman.



DECIDE

Analiza con tu equipo la información de las actividades anteriores y respondan la siguiente pregunta.

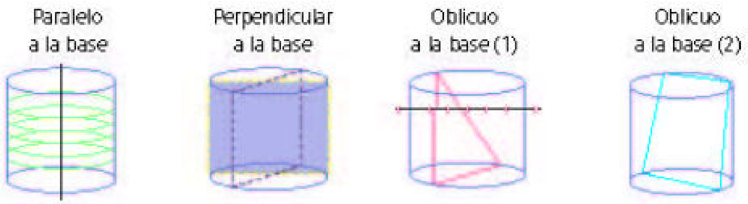
1. ¿Cómo son los círculos que se obtuvieron al hacer cortes paralelos a la base de un cono?
2. ¿Qué tipo de relación hay entre la altura y el radio?

COMUNICA

Expongan ante el grupo sus respuestas y comenten cómo obtuvieron los valores de los radios de los círculos que se formaron al realizar los cortes paralelos a cada centímetro de la altura. Analicen las diferencias en sus procedimientos. Anoten en su cuaderno las conclusiones que obtengan.

Resumiendo

Algunos de los cortes que pueden hacerse en un cilindro son:



Cuando un cilindro se corta con un *plano paralelo* a la base, la sección que se obtiene es un *círculo*. Si el corte es con un *plano perpendicular* a la base se origina un *rectángulo*. Al cortar al cilindro recto con un *plano inclinado* (de modo que no se corten las bases), se genera una *elipse*. Si el *corte oblicuo* corta a la base, lo que se consigue es un *triángulo o un paralelogramo*.

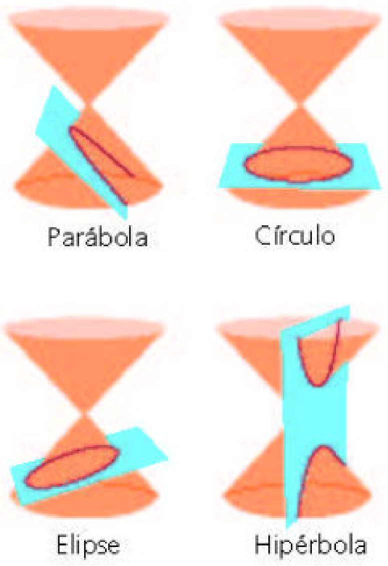
Las *secciones cónicas* son curvas que pueden obtenerse al cortar un cono recto con un plano. Las distintas cónicas aparecen dependiendo de la inclinación del plano respecto del eje del cono, el corte del plano al cono forma las secciones cónicas.

Cuando el plano de corte se encuentra *paralelo a la generatriz* del cono se forma una *parábola*.

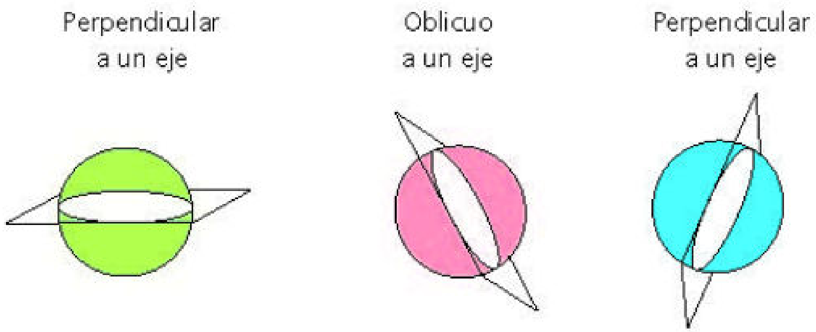
Si el plano que corta al cono se encuentra *paralelo a la base* se obtiene un *círculo*. Entre más se acerquen a la punta del cono los cortes se obtendrán círculos de dimensiones cada vez menores.

Cuando se corta un cono con un *plano oblicuo a su eje* se obtiene una *elipse*.

Cuando el plano que corta a un cono es *paralelo a su eje* se forma una *hipérbola*.



El *corte de una esfera* con un plano en cualquier posición siempre genera una *circunferencia*. Si el plano pasa por el centro de la esfera se obtiene un círculo máximo (cuyo radio es el radio de la esfera). Cuando el plano no pasa por el centro se obtiene un círculo menor. Ejemplos de los cortes que se pueden hacer en una esfera son los siguientes.



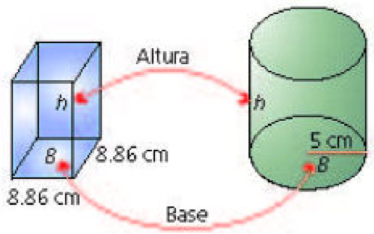
5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Medir una característica significa compararla. Esto nos lleva a preguntarnos cuál es una manera *válida* (adecuada o con sentido) de medir una característica particular. Por lo que debemos interesarnos por comprender la característica que va a medirse.

IDENTIFICA

En esta lección estudiaremos cómo es la fórmula para medir el volumen del cilindro. Para ello se necesita lo siguiente:

Construye en equipo un prisma de base cuadrada y un cilindro con cartulina, sin tapa, con la misma altura h de 10 cm y la misma área de sus bases B aproximadas a 78.5 cm^2. Usa arena para llenarlos.



CONSTRUYE

De acuerdo con lo anterior, realiza lo siguiente:

1. Llena el prisma con arena y luego vierte la misma arena en el cilindro. ¿Qué observas? Explica por qué.
2. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el volumen del prisma?
3. Si la altura y la base de los dos cuerpos son iguales, ¿cómo puedes relacionar los elementos de la fórmula para determinar el volumen del prisma y los del cilindro?
4. Especifica las características que se consideran para obtener cada una de las áreas de la base de cada sólido.
5. Escribe la fórmula para expresar el volumen del cilindro con tus deducciones anteriores. Presenta al grupo tu fórmula y comparen sus ideas escuchando con tolerancia las de los otros.

DECIDE

Analiza lo estudiado en las actividades anteriores y resuelve lo siguiente

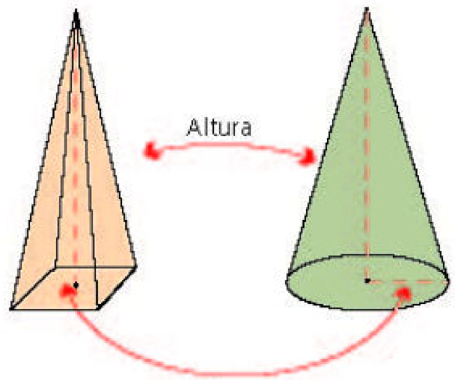
1. Construye un prisma correspondiente al cilindro que se pidió al inicio de la lección, es decir, que tenga la misma base y altura.
   a) Verifica que el volumen de los que hacen par con la arena sea el mismo.
   b) Calcula el volumen de los dos cuerpos con base en sus medidas.

IDENTIFICA

Como mencionamos en una lección anterior, los conos pertenecen a la familia de las pirámides. Imagina una pirámide con muchos lados. ¿Recuerdas cuál es la fórmula para calcular el volumen de una pirámide?

En equipo establezcan la fórmula del volumen del cono; para ello necesitan lo siguiente:

- Construyan con cartulina un cono y una pirámide de base cuadrada, sin tapa, de la misma altura (15 cm) y que sus bases tengan un área aproximada de 200 cm^2, y arena.
- Llenen el cono con arena fina y viértanlo en la pirámide, ¿qué observan?



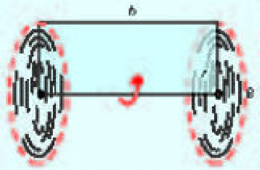
Algo esencial

El cilindro es un *cuerpo de revolución*. Se genera al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Llamamos bases del cilindro a los círculos que lo limitan y altura a la distancia que existe entre éstos.

Volumen

$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 h$$



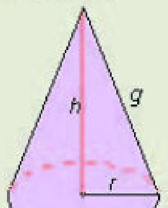
CONSTRUYE

Analiza la información anterior y contesta en tu cuaderno lo siguiente.

1. ¿Con cuántos conos de arena se llenará la pirámide?
   Verifícalo y compara tus hallazgos con tus compañeros.
2. ¿Cómo relacionarías la fórmula del volumen del prisma con la del cono?
3. Presenta tu fórmula para calcular el volumen del cono a tus compañeros. Comenten con argumentos cómo la establecieron.

Ten en cuenta

Volumen del cono



$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

DECIDE

Para verificar la fórmula y calcular el volumen del cono, haz lo siguiente:

1. Construyan un cono cualquiera, sin tapa; calculen su volumen con la fórmula que se determinó.
2. Construyan una pirámide que tenga la misma base y altura que el cono.
3. Calculen el volumen de la pirámide.
4. Haz equipo con dos compañeros y comprueben que sus cálculos son correctos vaciando arena del cono a la pirámide. Registren sus resultados y expónganlos ante el grupo.

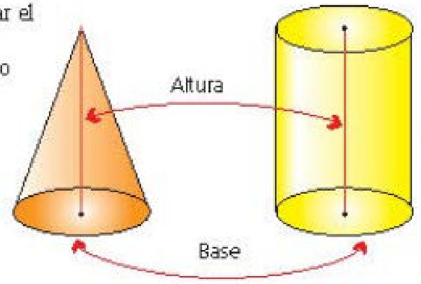
Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

En esta lección obtendremos la fórmula para calcular el volumen de un cono:

Para hacerlo necesitamos un cono y un cilindro que tengan la misma medida en su altura y base.

Utilizaremos el cono que construiste en la lección anterior (altura, 15 cm y base, 200 cm^2). Necesitas construir un cilindro con estas medidas de base y altura, y arena para llenarlos.



1. Llena el cono con arena y luego vacía el contenido del cono en el cilindro. ¿Qué sucedió? Explica por qué.
2. Vuelve a llenar el cono y vacíalo de nuevo en el cilindro. Repite esto hasta que se llene. ¿Con cuántos conos se llenó el cilindro?
3. ¿Cómo relacionarías los elementos de la fórmula para determinar el volumen del cono y el cilindro?
4. Escribe la fórmula para el volumen del cono y expón tus ideas con el grupo.

Algo esencial

Tronco de cono se refiere a un cono que no tiene punta; también se conoce como cono truncado.

Profundizando

Para establecer una fórmula es necesario, además de conocer las características, llevar una secuencia lógica. Para entender cómo, estudia lo siguiente con un compañero y precisen cada paso del proceso.

Tronco de cono

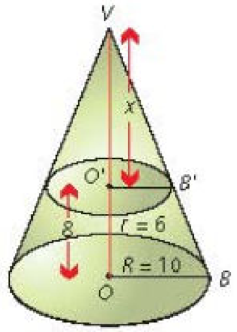
Al cortar un cono con un plano paralelo a su base se forma un cono más pequeño y un tronco de cono. Los cálculos se organizan como en el caso de la pirámide regular.

Datos: $R = 10$ cm $\quad r = 6$ cm $\quad \overline{O'O} = 8$ cm

Los triángulos $VO'B'$ y VOB son semejantes:

$\dfrac{\overline{BO'}}{\overline{BO}} = \dfrac{r}{R}$, de la figura se tiene $\overline{VO'} = x \quad \overline{VO} = x + 8$

$\dfrac{x}{x+8} = \dfrac{6}{10}$, de ahí que $x = 12$ cm.



El volumen del tronco es la diferencia entre los volúmenes de los conos:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot VO - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot VO' = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 = 1642 \text{ cm}^3$$

Compara tus observaciones con el grupo.

Resumiendo

En esta lección se estudió cómo se construye la fórmula para medir el volumen del cilindro y el del cono.

La fórmula del volumen de un *cilindro* se obtiene de la de un prisma, a su vez, la fórmula de este último se determina multiplicando el área de la base por el número de capas que integran la altura del sólido. Como el cilindro se compone de varias capas circulares o discos, entonces el volumen de un cilindro es igual al área de cada disco multiplicada por el número de ellos, dado que el número de discos es igual a la altura del cilindro, la fórmula para el volumen de este cuerpo de revolución es:

$$V = A_B \times h$$

donde A_B es el área de la base del cilindro y h es su altura.

Como la base del cilindro es un círculo entonces la fórmula del volumen es: $V = \pi r^2 h$

Para el caso del cono recto, la fórmula para calcular su volumen se deriva de la fórmula de una pirámide

que es $\frac{1}{3}$ del producto de su base y su altura:

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Y dado que la base del cono es un círculo, se sustituye en la fórmula la B por πr^2, quedando así:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Explora en internet

Visita la página http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso1/htmla/SEC_41.htm

Este sitio titulado "Los voluminosos" es parte de una serie de cursos educativos. En esta página aparece un cuestionario sobre el volumen de algunos cuerpos que puedes contestar en forma individual o formar un equipo de trabajo para estudiar y resolver cada uno de los problemas que ahí aparecen.

Comprueba tus resultados al final de la página en el apartado titulado "Clave".

Fecha y hora de consulta: 4 de noviembre de 2013, 15:45.

5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

En los últimos apartados hemos estudiado los cuerpos redondos, sus características, propiedades, su desarrollo plano y las fórmulas para calcular su volumen. Ahora aplicaremos este conocimiento para resolver problemas en los que mostrarás tus habilidades y estrategias.

Explora en internet

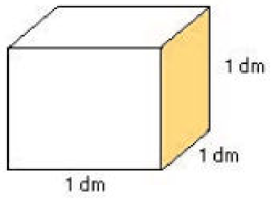
Visita la página http://www.uco.es/~ma1marea/Medidas/Volumen/Volumen0.html

Este sitio está dedicado al estudio de las medidas de volumen. Te recomendamos que lo estudies en forma individual y que visites todas las conexiones que tiene, ya que son importantes para ilustrar el tema; elabora un resumen de los aspectos que consideres más relevantes y prepara en hojas de rotafolio los conocimientos trabajados en esta experiencia, después exponlos ante todo el grupo.

Fecha y hora de consulta: 4 de noviembre de 2013, 15:30.

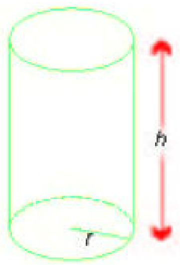
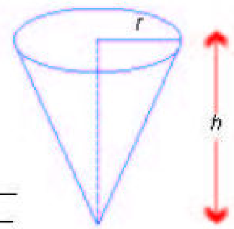
IDENTIFICA

Considera lo siguiente:



1 dm^3 equivale a 1 litro

Estima las medidas de las siguientes figuras para que cada una tenga una capacidad de un litro.

Cilindro	Cono
h = ________ r = ________ 	h = ________ r = ________ 

CONSTRUYE

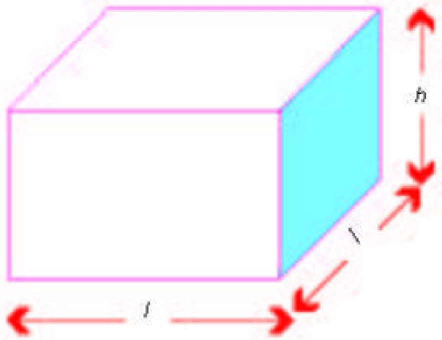
Analiza el planteamiento anterior y responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. ¿Cuántos litros estimas que caben en:
   a) un cono de papel para beber agua?
   b) una lata de refresco?
   c) un cubo de 10 cm por lado?
2. ¿De qué manera hiciste las estimaciones? Compártelas con tus compañeros.

DECIDE

Analiza lo estudiado en las actividades anteriores y resuelve lo siguiente.

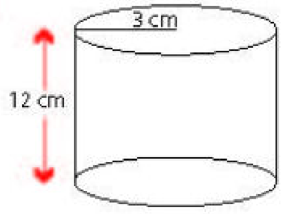
1. Estima las medidas de la siguiente figura para que tenga la capacidad de medio litro.

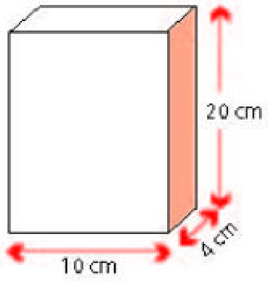


h = ________
l = ________

2. Estima cuál de los envases tiene mayor volumen.

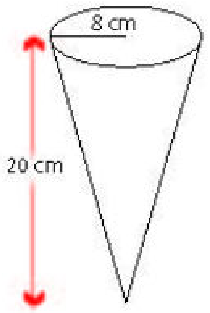
a)

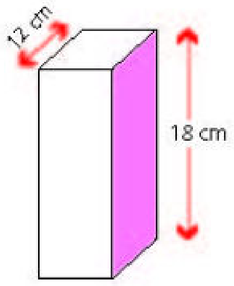




Argumenta tu respuesta.

b)





Argumenta tu respuesta.

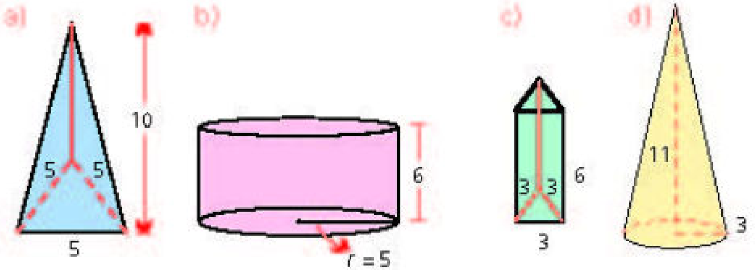
COMUNICA

Compara tus respuestas con tus compañeros. Formen equipos y discutan cuáles son las mejores estrategias para dar respuesta a los problemas anteriores; también comenten las diferencias sobre la equivalencia entre las unidades de capacidad y las de volumen. Pidan ayuda a su profesor si es necesario.

IDENTIFICA

Para iniciar nuestra incursión en la resolución de problemas sobre volúmenes; primero hagamos un ejercicio muy sencillo con las formas geométricas y sus fórmulas.

Relaciona el cálculo del volumen con el inciso de los cuerpos correspondientes:



( ) La altura de la base es: $\sqrt{3^2 - 1.5^2}$ = ______ cm

$V = 7.80 \cdot \frac{6}{2} =$ ______ cm^3

( ) $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 =$ ______ cm^3

( ) Si a es la altura de la base, resulta:

$a = \sqrt{5^2 - 2.5^2} =$ ______ cm

Área de la base $= \frac{5 \cdot 4.33}{2} =$ ______ cm^2

$V = \frac{10.825 \cdot 10}{3} =$ ______ cm^3

( ) $V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 11}{3} =$ ______ cm^3

CONSTRUYE

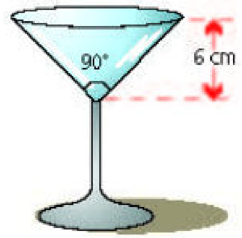
Reflexiona la información que obtuviste en la actividad anterior, contesta lo siguiente y después comunica al grupo tus respuestas. Comparen opiniones y cómo llegaron a ellas.

1. Explica cómo los relacionaste.
2. Realiza los cálculos para obtener los volúmenes.
3. Describe paso a paso el procedimiento.

DECIDE

De acuerdo con lo aprendido en las actividades anteriores, responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. Traza un cilindro recto. El radio de la base mide 5 cm y la altura 12 cm. Calcula:
   a) El área de la base.
   b) El área lateral.
   c) El área de todo el cilindro.
   d) El volumen del cilindro.
2. Traza un cono recto. El radio de la base mide 7 cm y la generatriz mide 13 cm. Calcula:
   a) El área de la base.
   b) El área lateral.
   c) El área de todo el cono.
   d) El volumen del cono.
3. El radio de la base de un cilindro mide 1.5 cm y su altura es el doble de su diámetro. Calcula el volumen.
4. ¿Qué altura alcanzan 15 cl de agua en esta copa?



COMUNICA

Comenten en el grupo las dificultades que enfrentaron para resolver los problemas. Discutan qué sucede con el volumen cuando varía el valor del radio de la base.

Escribe en el cuaderno las conclusiones que obtengan.

Profundizando

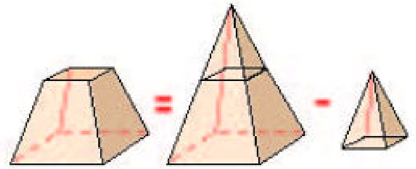
En parejas, estudien la siguiente información y cómo se resuelve el problema. Pongan énfasis en el proceso y escriban notas sobre lo relevante en el uso de las fórmulas y análisis.

Volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono

El volumen de un tronco de pirámide (o pirámide truncada) se determina mediante una diferencia: basta restar al volumen de la pirámide grande el volumen de la pirámide pequeña.

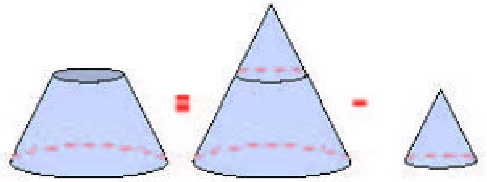
Lo mismo ocurre para el tronco de cono, como se puede observar a partir de las siguientes imágenes.

Tronco de pirámide



$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide mayor}} - V_{\text{pirámide menor}}$

Tronco de cono



$V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono mayor}} - V_{\text{cono menor}}$

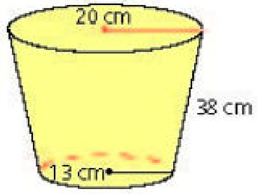
Problema

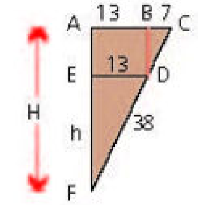
Un contenedor de basura tiene 40 cm de diámetro mayor y 26 cm de diámetro menor.

La medida de la generatriz es 38 cm. Halla el volumen del contenedor.

El contenedor de basura es un tronco de cono. El radio de la base mayor es $R = 20$ cm y el radio de la base menor es $r = 13$ cm.

Necesitamos conocer la altura del cono grande H y la altura del cono pequeño h.





$\overline{AE} = \sqrt{38^2 - 7^2} = 37.35$ cm

Los triángulos CAF, DEF y CBD son semejantes; entonces, por proporcionalidad, resulta:

$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{H}{\overline{BD}}$ de donde $\frac{20}{7} = \frac{H}{37.35}$

$H = 106.71$ cm

$h = H - \overline{AE} = 106.71 - 37.35 = 69.36$ cm

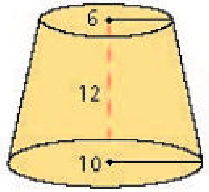
$V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono mayor}} - V_{\text{cono menor}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(20)^2 \cdot 106.71 - \frac{1}{3}\pi(13)^2\, 69.36 = 32423.5$ cm^2

Comparen con otros compañeros e intercambien sus puntos de vista.

Ahora resuelve estos problemas:

1. Un vaso tiene forma de tronco de cono; el diámetro de la base mayor es igual a 7 cm y el radio de la base menor es igual a 2.5 cm. Si la generatriz es igual a 10 cm, halla:
   a) Área lateral b) Área total c) Volumen
2. Calcula la superficie lateral y el volumen del tronco de la figura de la derecha (indicación: reconstruye el cono).



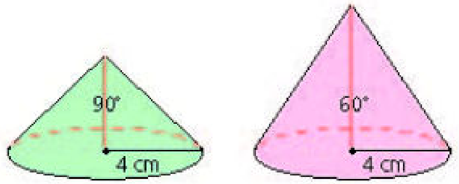
Resolviendo problemas

Es el momento de utilizar tus estrategias y perfeccionarlas.

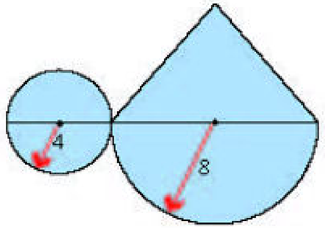
Resuelve los siguientes problemas, ¿recuerdas cuáles son los pasos recomendados?

Al terminar, contrasta tus soluciones con las de tus compañeros y expliquen con argumentos cómo lo hicieron.

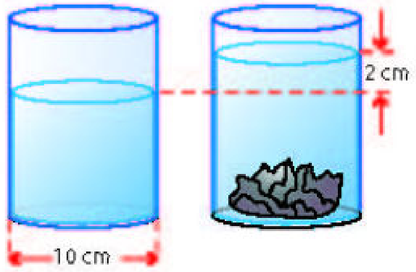
1. Un depósito tiene forma cilíndrica. El diámetro de su base mide 1.5 m y su altura 3 m. Calcula su volumen.
2. Elige. Halla el volumen de uno de los conos y el área total del otro; tienes una condición: no puedes utilizar la igualdad de Pitágoras.



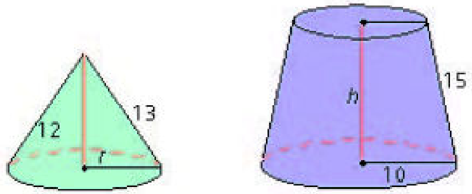
3. ¿Es el patrón de un cono? Justifícalo.



4. Calcula el volumen de la piedra.



5. Haz un dibujo de un cilindro de 1.2 dm de altura, siendo el diámetro de su base 4 cm. Calcula el volumen.
6. Calcula el valor de las incógnitas (r y h).



Competencia matemática en acción

Manejo de técnicas con eficiencia

I. En equipo resuelvan los siguientes problemas. Participen de forma ordenada y limpia.
   1. Un envase de forma cilíndrica tiene un volumen de 235.5 cm^3. ¿Cuánto mide de altura si su base tiene 5 cm de diámetro?
   2. El volumen de un depósito de semillas con forma de cono es de 27.21 m^3. Si su radio mide 2 m, ¿cuánto mide de altura?
   3. Plantea dos problemas, conociendo el volumen de un cono y de un cilindro. Redáctalos y resuélvelos antes de dárselos a un compañero para que los resuelva.

II. Resuelve los siguientes problemas y después contesta lo siguiente:
   ¿Cuál es la relación entre la altura y el volumen en el cilindro y en el cono, cuando el área de la base se mantiene constante? Argumenta tu respuesta.
   1. Si el volumen de un cono es 376.8 cm^3 y su altura 10 cm, ¿cuánto mide el radio?
   2. Si el volumen de un cilindro es de 100.47 cm^3 y su altura es de 8 cm, ¿cuánto mide el radio?

Resumiendo

Para calcular el volumen del cilindro se realiza el producto del área de la base por la altura:

$V_{cilindro}$ = área base • altura

o lo que es lo mismo:

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

ya que $\pi \cdot r^2$ es el área de la base.

El volumen del cono es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura.

Es decir, en un cono de radio r y altura h, el volumen se calcula:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \text{área base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Al variar los datos de las variables implicadas en las fórmulas, puede resultar lo siguiente:

a) Al aumentar al doble la altura de un cilindro o un cono, el volumen aumenta al doble.

b) Cuando se aumenta al doble la medida del radio de un cilindro, el volumen se cuadriplica. Esto sucede ya que el radio está elevado al cuadrado y la altura no.

En esta lección también se estudió que el volumen de un tronco de pirámide se determina mediante una diferencia: sólo se resta al volumen de la pirámide grande el volumen de la pirámide pequeña o pirámide deficiente. Lo mismo ocurre para el caso del tronco de cono: al volumen del cono mayor se le resta el volumen del cono menor.

Explora en internet

Visita la página http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m1_geometria.php

Esta página no es dinámica, pero en ella aparecen varios temas de geometría, construida por expertos en la asignatura de Física que clasifican estas actividades en apuntes y ejercicios. Selecciona los temas de nuestro interés, es decir, conos, cilindros y esferas.

Fecha y hora de consulta: 4 de noviembre de 2013, 16:00.

Explora en internet

Visita la página http://www.tianguisdefisica.com/Actividades.html

Este sitio electrónico pertenece a la Universidad Nacional Autónoma de México. Selecciona el cuadro de diálogo "¿A dónde voy? Mapa del Tianguis de Física" y aparecerán todos los experimentos que contiene.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Proporcionalidad y funciones

5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

En los medios de información y de comunicación aparece información de carácter económico, científico, social, deportivo, educativo, etcétera, expresada mediante gráficas.

En el mundo actual, el lenguaje gráfico es un instrumento imprescindible para conocer y transmitir información.

La utilidad de las gráficas reside en que proporcionan una visión global de los fenómenos y hechos naturales o sociales de nuestro entorno y muestran cómo dependen unas magnitudes de otras. En esta lección aprenderemos a interpretar gráficas y a describir los fenómenos que representan.

Profundizando

En equipos, estudien los siguientes problemas y respondan las preguntas, escuchando con sentido crítico a sus compañeros.

1 En la tabla se muestra la estatura (en centímetros) de Rubén, medida cada año durante sus primeros 14 años.

Edad (R)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Estatura (H)	51	75	79	94	99	110	114	122	127	132	138	143	148	154	167

Tabla 5.6

a) Si R representa la edad de Rubén y H su altura, explica cómo varía H en función de R.

b) ¿Cuál es la variación de estatura entre los 4 y los 14 años ?

c) ¿Creció Rubén más rápido durante los primeros 4 años de vida o en los siguientes 10 años?

2 En la siguiente tabla se muestra la producción mundial de bicicletas de algunos años seleccionados entre 1950 y 1990. La producción de bicicletas está dada en millones.

Año (A)	1950	1960	1970	1980	1990	1993
Producción (P)	11	20	36	62	90	108

Tabla 5.7

a) Explica cómo varía P en función de A.

b) ¿Cuál es la variación de cambio entre 1950 y 1960; y entre 1990 y 1993?

3 En cada una de las siguientes tablas de valores explica cómo varían las cantidades x en función de y.

a)

x	0	1	2	3
y	25	80	35	40

Tabla 5.8

b)

x	0	2	4	6	8
y	1	5	17	37	65

Tabla 5.9

c)

x	−3	0	3	6
y	10	16	22	28

Tabla 5.10

d)

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	1	0	−1	4

Tabla 5.11

Algo esencial

Magnitud es cualquier característica de los cuerpos que pueda medirse: velocidad, longitud, peso, etcétera.

En una función se relacionan dos magnitudes o variables, una dependiente y otra independiente.

Esta relación puede representarse en una tabla, para ello se calculan pares de valores, o por una gráfica en la que se puedan leer todos los pares, o mediante una fórmula.

Variable independiente: se representa en el eje x o de las abscisas.

Variable dependiente: se representa en el eje y o de las ordenadas.

Algo esencial

Una función puede entenderse como una regla que asocia a cada valor posible de la variable independiente un valor ¡y sólo uno! a la variable dependiente.

Si designamos esta regla por f (cualquier otra letra valdría), escribimos:

$f(1) = 8$ $\quad f(2.5) = 5$ $\quad f(3) = 4$

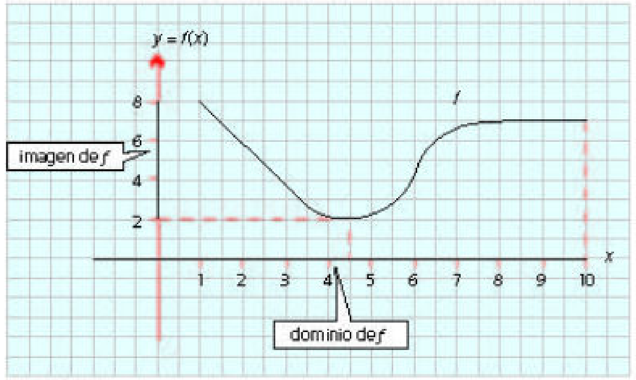
y en general

$$f(x) = y$$

Nombre de la función — Valor de la variable dependiente

Valor de la variable independiente

x	y
1	8
1.5	7
2	6
2.5	5
...	...



Gráfica 5.1

4 Determina las variables dependientes e independientes de los ejercicios anteriores. Coméntalo con tus compañeros.

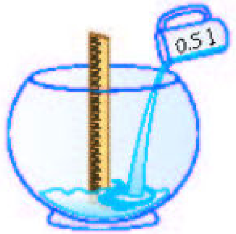
5 Escribe tres ejemplos donde indiques las variables independientes y dependientes.

IDENTIFICA

Para esta actividad requieres un recipiente de vidrio en forma esférica, como el que se muestra en la figura. Llena de agua el recipiente, vertiendo en cada ocasión 0.5 l, mide la altura que va alcanzando el nivel del agua. Completa la siguiente tabla:

Volumen (l)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Altura (cm)										

Tabla 5.12

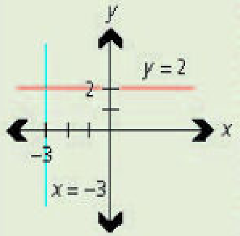


Ten en cuenta

Las ecuaciones de la forma: $y = k$ tienen por gráfica rectas paralelas al eje de las abscisas y se llaman funciones constantes.

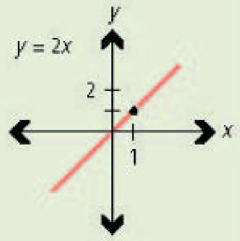
Las rectas de ecuaciones $x = k$ son paralelas al eje de las ordenadas.

Estas rectas no son propiamente funciones, pues para un valor de x no le corresponde un único valor de y.



Ten en cuenta

La función lineal que está dada por una ecuación de la forma $y = mx$
- Expresa que las variables x y y son directamente proporcionales.
- Se representa por gráficas que son rectas que pasan por el origen.



CONSTRUYE

Analiza la información que obtuviste en la actividad anterior, contesta lo siguiente.
1. ¿Cuáles son las variables que se relacionan en la tabla?
2. Localiza los centímetros que asciende el nivel con los contenidos del primero y del último recipiente. ¿Por qué las mediciones son diferentes?

DECIDE

De acuerdo con la información de las actividades anteriores, responde en tu cuaderno lo siguiente.
1. Observa el recipiente y explica por qué los resultados son distintos cada vez que viertes el agua.
2. Realiza la gráfica en tu cuaderno y comprueba que no es una línea recta. ¿Es una función? Explica.

COMUNICA

Comparte tus respuestas con tus compañeros y juntos identifiquen cuáles son los dos tipos de representaciones que corresponden a la misma relación en una función. Anota en el cuaderno las conclusiones.

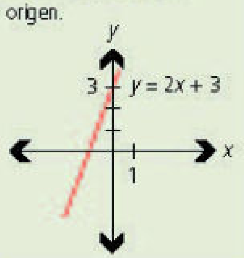
Ten en cuenta

La función lineal que está dada por una ecuación de la forma:

$y = mx + b$ $(b \neq 0)$

es una recta que no pasa por el origen.

El valor de la ordenada cuando $x = 0$ es b y se llama ordenada en el origen.

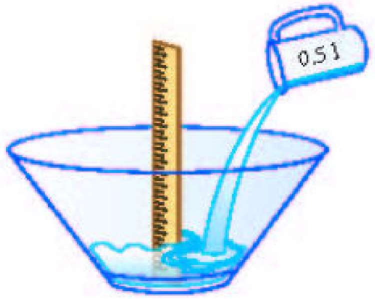


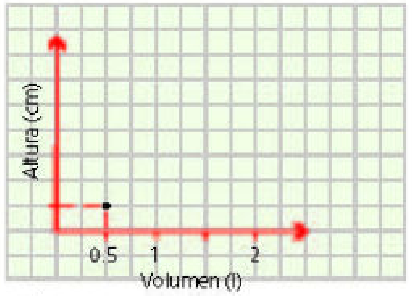
IDENTIFICA

Ahora, realiza la misma experiencia pero con un recipiente como el que se muestra en la siguiente figura. Con los datos que obtienes en tu medición completa la siguiente tabla:

Volumen (l)	0.5	1.0	1.5	...
Altura (cm)				

Tabla 5.13





Gráfica 5.2

CONSTRUYE

Responde en tu cuaderno lo siguiente.
1. Al registrar los datos en la tabla nota que los centímetros que asciende el agua al vaciar el recipiente son diferentes. Explica por qué.
2. Con los datos obtenidos completa la gráfica y verifica que tampoco es una línea recta.
3. Escribe tus observaciones sobre estas dos experiencias realizadas con el llenado de recipientes.

DECIDE

Consideremos el llenado de recipientes, donde f es la letra que representa la función del llenado de agua del recipiente de forma esférica y g la del llenado del recipiente de forma trapezoidal.
1. Determina los valores siguientes y explica tus resultados.
   $f(0.5)$ y $g(0.5)$; $f(1)$ y $g(1)$ y $f(2.5)$ y $g(2.5)$
2. ¿Cuál es la imagen y el dominio en los dos experimentos del llenado de recipientes?

COMUNICA

Comparte tus respuestas con tus compañeros y juntos analicen las características de los dos tipos de representaciones que corresponden a la misma relación. Anoten en sus cuadernos las conclusiones.

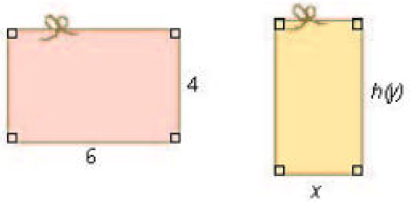
Competencia matemática en acción

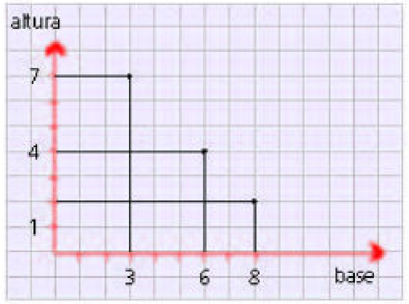
Manejo de técnicas con eficiencia

Forma un equipo de tres compañeros y realicen el experimento siguiente; para ello utilicen un cordel o hilo y su juego de geometría, argumenten sus respuestas y dialoguen para generar conclusiones.
1. Con un hilo de 20 cm podemos formar una infinidad de rectángulos; para cada valor posible de la base se tiene otro correspondiente para la altura.

Base (x)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	...
Altura $h(y)$							...

Tabla 5.14





Gráfica 5.3

Algo esencial
- *Dominio de una función*: es el conjunto de valores que toma la variable independiente.
- *Imagen o rango de una función*: es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

No es necesario que las escalas de los ejes sean iguales, pues las variables suelen representar magnitudes diferentes. La elección de las escalas debe realizarse atendiendo únicamente a la mejor legibilidad de la gráfica.

a) Completa y representa la tabla.
b) Determina $h(4)$ y $h(0.5)$.
c) Determina x de modo que $h(y) = 4.5$.
d) Indica el dominio y la imagen de h.
e) La bisectriz del ángulo que forman los ejes corta a la gráfica en un punto. ¿Qué rectángulo representa ese punto?
f) Explica con tus palabras los efectos que se generan con la función $h(y)$.

2 A partir de una tabla de valores hemos dibujado la gráfica de tres funciones. Veamos qué propiedades podemos deducir de su análisis.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x + 4$	0	2	4	6	8	10
$y = 2x - 2$	-6	-4	-2	0	2	4

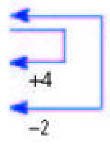
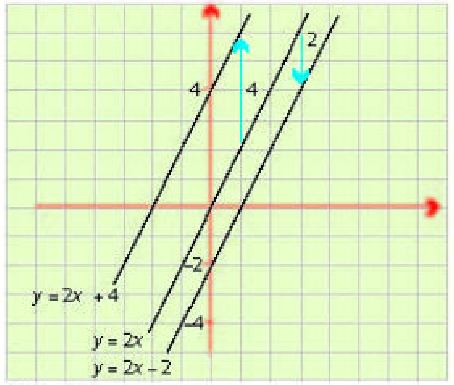


Tabla 5.15

a) A partir de la gráfica de $y = 2x$ que es lineal, explica cómo se pueden trazar las gráficas de:
- $y = 2x + 4$
- $y = 2x - 2$

b) Al tratarse de una recta, ¿la gráfica de una función lineal puede trazarse calculando únicamente dos de sus puntos? Explica.
c) Las tres rectas son paralelas, ¿qué podemos deducir a partir de este hecho? Argumenta tu respuesta.
d) Por último, las tres funciones lineales cortan el eje y, ¿qué significa?



Gráfica 5.4

Resolviendo problemas

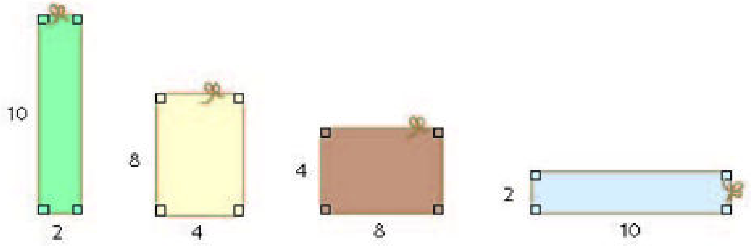
Resuelve los siguientes problemas.

1 Traza sobre el mismo plano cartesiano las tres rectas que se indican:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ $\quad y = x + 3 \quad y = 3$

b) $y = \frac{2}{3}x - 4$ $\quad y = -1 + \frac{2}{3}x \quad y = 4 + \frac{2}{3}x$

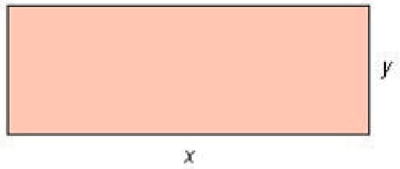
2 Con un cordel de 24 cm podemos formar una infinidad de rectángulos.



Para cada valor x de la base se obtiene un valor y de la altura.

Base (x)	1	3	5	7	...
Altura $h(y)$					...

Tabla 5.16



a) Completa la tabla.
b) ¿Son proporcionales base y altura?
c) ¿Se trata de una función lineal?
d) Justifica la expresión $2x + 2y = 24$. Despeja y.
e) Representa la función anterior. Sobre una gráfica, determina aproximadamente la base de un rectángulo de altura 8.2 cm.
f) ¿Cuál es el dominio de la función?

3 Calcula las ecuaciones de las tres funciones siguientes y represéntalas en los mismos ejes:
a) Calcula el 15% de un precio: $x \longrightarrow$ 15% de x.
b) Aumentar el precio en un 15%: $x \longrightarrow x +$ 15% de x.
c) Disminuir el precio en un 15%: $x \longrightarrow x -$ 15% de x.

4 Hay gente que piensa que un aumento del 10% seguido de una rebaja del 10% dejaría el precio invariable:
a) Compruébalo para un precio inicial de 300 pesos.
b) Calcúlalo para un precio x y obtén la ecuación de la función:
precio inicial $\longrightarrow$ precio final

Reto

Un globo de 5 cm de radio se está inflando, por lo que su radio va aumentando. Determina la razón de cambio del volumen del globo (suponiendo que es una esfera) con respecto a su radio.
a) Cuando aumenta de 5 a 6 cm.
b) Cuando aumenta de 6 a 7 cm.

Explora en internet

Visita la página http://www.tianguisdefisica.com/Actividades.html

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) cuenta con esta página que contiene una gran variedad de experimentos.

Fecha de consulta: 27 de enero de 2017.

Resumiendo

En esta lección se estudió que en una función se relacionan dos magnitudes o variables y que esta relación puede representarse en una tabla con pares de valores, mediante una gráfica en la que se pueden leer esos pares de valores, o por una fórmula algebraica.

Una *magnitud* es cualquier característica de los cuerpos que pueda medirse: velocidad, longitud, peso, etcétera.

Una *función* es una regla que asocia a cada valor posible de la variable independiente un solo valor de la variable dependiente.

La *variable independiente* se representa en el eje x o de las abscisas.

La *variable dependiente* se representa en el eje y o de las ordenadas.

Dominio de una función es el conjunto de valores que toma la variable independiente.

Imagen o rango de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Cuando en la expresión algebraica la *variable* está en *forma de exponente* (por ejemplo 6^n) tiene como gráfica una curva llamada *exponencial*; y si la *variable* está en forma de *factor* (por ejemplo 2.5x) tiene como gráfica una *recta*.

De lo anterior se puede considerar al crecimiento de la población o a la reproducción de bacterias como un fenómeno que se comporta de forma exponencial y al interés simple como un ejemplo de una situación que se comporta de manera lineal.

La gráfica asociada a una relación entre tiempo y distancia de un cuerpo con aceleración constante (por ejemplo, la aceleración de un auto en una pendiente) es una curva llamada *parábola*. Esto significa que se trata de una *relación cuadrática*.

La gráfica de expresiones de la forma $y = ax^2 + b$ es una parábola, donde b es igual a 0 y es llamada *ordenada al origen*. Esta relación también es de tipo cuadrática.

La expresión asociada a una relación de *proporcionalidad inversa* es de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica de este tipo de relación es una *hipérbola* que no interseca a ninguno de los ejes del plano cartesiano.

Una función es *lineal por pedazos* si su gráfica está formada por *segmentos de recta o curva* y modelan situaciones de llenado de recipientes y objetos en movimiento.

Las funciones de la ecuación $y = k$ tienen por gráfica *rectas paralelas al eje de las abscisas* y se llaman *funciones constantes*.

Las rectas de ecuaciones $x = k$ son *paralelas al eje de las ordenadas*, por ello estas rectas no se consideran propiamente *funciones*.

La función lineal que está dada por una ecuación de la forma $y = mx$, expresa que las variables x y y son directamente proporcionales y se representa por gráficas que son *rectas que pasan por el origen*.

La función lineal que está dada por una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde $b \neq 0$, es una recta que no pasa por el origen. El valor de la ordenada cuando $x = 0$ es b y se llama *ordenada en el origen*.

Explora en internet

Visita la página http://www.cienciapopular.com/n/Ciencia/Juegos_de_Azar/Juegos_de_Azar.php

Esta página presenta una breve semblanza del origen de los juegos de azar y explica cuáles son los que principalmente se juegan en la actualidad.

Fecha y hora de consulta: 4 de noviembre de 2013, 16:45.

Nociones de probabilidad

5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Los juegos de azar siempre han llamado la atención de muchas personas. Cuando se lanza una moneda al aire no se puede afirmar con certeza sobre cuál de sus dos caras caerá. Al lanzar un dado hay seis posibilidades latentes, pero si agregamos otro dado al primero, éstas aumentan en mucho más de doce.

Un juego de azar no requiere destreza para jugarse, pues de hecho, no hay forma de saber qué resultado se obtendrá, pero el análisis matemático puede dar al jugador indicios de qué tanto le conviene o no anticipar un resultado, con base en el estudio de la probabilidad.

IDENTIFICA

La invención de la ruleta se le atribuye a Blaise Pascal. Consiste en una rueda giratoria numerada del 1 al 36, con dos colores alternados, negro y rojo. A la ruleta de la imagen se le ha añadido el número 0 en color verde y se le denomina ruleta europea. La ruleta americana consta además de un doble 0, también en fondo verde, aumentando con esto las posibilidades a 38.

Uno de los mejores ejemplos de juegos de azar es la ruleta, donde cualquier número tiene la misma probabilidad de salir.

La ruleta se hace girar y en sentido contrario al giro se arroja una pequeña esfera, la cual no tardará en caer en alguna de las canaletas correspondientes a los números.

CONSTRUYE

Con los conocimientos que has adquirido sobre probabilidad, determina lo siguiente si la ruleta consta de 36 números y se retiran el 0 y el doble 0.

1. Si vas a apostar al número 8, ¿qué tipo de eventos son la probabilidad de que salga el 8 o de que salga otro número?
2. Si apuestas al 5 y luego nuevamente al 5, ¿los eventos son dependientes o independientes?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número cualquiera?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga alguno de los dos colores?

DECIDE

Responde las siguientes preguntas.

1. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cualquier número?
2. ¿El resultado es equiprobable? ¿Por qué?
3. ¿Es justo? ¿Por qué?
4. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar?
5. ¿El resultado es equiprobable? ¿Por qué?
6. ¿Es justo? ¿Por qué?
7. Cuando se lanza una moneda al aire, ¿el juego es o no es equiprobable?, ¿es o no es justo? Justifica tu respuesta.

Ten en cuenta

En la ruleta de 36 números, cualquiera de ellos tiene la misma probabilidad de salir; por lo tanto, es un juego equiprobable.

Si la mitad de los números está asignada al color rojo y la otra mitad al negro, al apostar a uno de los dos colores, se tiene la misma probabilidad de ganar que de perder, se trata de un juego justo además de equiprobable. Pero en el momento que se agrega el cero en color verde, aunque el juego sigue siendo equiprobable para todos los números, deja de ser justo, porque ahora la probabilidad de ganar apostando al rojo, por ejemplo, no es la misma que la probabilidad de perder.

COMUNICA

Con ayuda de tu profesor comunica tus ideas al grupo, escuchando con respeto y comparando las respuestas de los otros compañeros con las tuyas.

IDENTIFICA

Reúnete con un compañero, lean el siguiente planteamiento y respondan las preguntas.

En un juego de feria hay dos ruletas, una está numerada del 1 al 6, la otra tiene cuatro franjas con dos colores, verde-azul-verde-azul.

1. ¿Qué probabilidad tiene cada número de salir en la ruleta numerada?
2. ¿Es equiprobable?
3. ¿Es un juego justo?
4. ¿Qué probabilidad tiene cada color de salir en la otra ruleta?
5. ¿Es equiprobable?
6. ¿Es un juego justo?

CONSTRUYE

Al público se le dan dos opciones para jugar.

Opción 1: Elegir un número de la ruleta numerada y un color de la otra ruleta, haciéndolas girar al mismo tiempo.

Opción 2: Elegir dos números de la ruleta numerada, haciéndola girar dos veces seguidas.

Determinen la probabilidad para cada una de las opciones.

DECIDE

Con los datos que obtuviste contesta las preguntas:

1. ¿Cuál de las dos opciones anteriores es más favorable?
2. ¿Es equiprobable? ¿Por qué?
3. ¿El juego es justo con esa opción? ¿Por qué?
4. Con tu compañero diseña una estrategia que permita que el juego sea justo empleando las dos ruletas. Justifica tu respuesta calculando la probabilidad.

COMUNICA

Comparte tu respuesta con otros compañeros, si obtuvieron resultados diferentes revisen qué procedimiento siguieron y determinen cuál es el correcto con ayuda de su profesor.

¿Consideran de utilidad saber calcular la probabilidad para determinar si un juego es o no es justo? Registren sus conclusiones.

Resolviendo problemas

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un hombre lanza dos dados e indica a los jugadores que ganan si la suma da 6 o 7. ¿El juego es justo? Justifica tu respuesta.
2. En una rueda de feria numerada del 1 al 10, los números pares se escribieron sobre un fondo verde y los impares sobre un fondo azul. ¿Cómo se debe apostar para que el juego sea justo? Justifica tu respuesta.
3. En una caja se colocan dos canicas verdes, dos rojas y dos blancas. Para ganar hay que extraer una canica roja. ¿El juego es equiprobable? ¿Es justo? Justifica tu respuesta.

Resumiendo

Un juego es *equiprobable* cuando todos los elementos tienen la misma probabilidad de salir.

Un juego es *justo* cuando se tiene la misma probabilidad de ganar que de perder.

Cuando se presentan *eventos mutuamente excluyentes o independientes* es necesario aplicar primero la regla de la suma o del producto, respectivamente, para poder determinar si el juego es equiprobable y si es justo.

★ ★ INFORMATIVO MATEMÁTICO ★ ★

Ciencia

Los satélites

Los satélites de comunicación emiten ondas que viajan a gran velocidad, cubriendo sólo una parte de la superficie terrestre y formando un cono.

Para ello se encuentran situados sobre el ecuador terrestre a 36 500 km de altura. En esta órbita, la velocidad a la que giran alrededor de la Tierra es equivalente a la velocidad de rotación del planeta, por lo que parece que no se mueven.

Historia

Una frase de Gauss

Karl Friedrich Gauss (1777-1855), reconocido matemático alemán, al referirse a la geometría del espacio dijo:

"Debemos admitir con humildad que mientras el número es puramente un producto de nuestra mente, el espacio tiene una realidad fuera de ella: por tanto, *a priori* no podemos describir completamente sus propiedades".

Un ejemplo de esto es la geometría de los fractales.

Investiga sobre ella: su forma y la manera de medirla.

Caso curioso

Cuadrado mágico algebraico

Para resolverlo tienes que seguir estas reglas:

1. Realiza las sumas verticales (3), horizontales (3) y diagonales (2).
2. Como supondrás por tus conocimientos, las sumas no son la misma expresión; sin embargo, hay un valor de x que hace que todas las sumas tengan el mismo total. ¿Cuál es el valor de x?

$4(x+1)$	x	$2(x+2)$
$4x-1$	$2x+3$	$4x+3$
$(x+1)^2$	$(x+2)^2$	$x+1$

Evaluación tipo PISA

El salario

5.1 En una tienda donde se vende ropa deportiva un vendedor realizó el siguiente comentario "Juan trabajó 5 días y Sergio 4, entre los dos cobraron \$2 300 y a la semana siguiente cobraron \$1 900 y trabajaron 3 y 5 días, respectivamente". Ayuda a determinar los salarios de Juan y Sergio.

Nivel 1) Escribe el sistema de ecuaciones que representa esta situación.
Nivel 2) ¿Cuánto gana por día cada uno?
Nivel 3) Si trabajan 5 días cada uno, ¿cuánto ganarán a la semana entre los dos?

El volumen

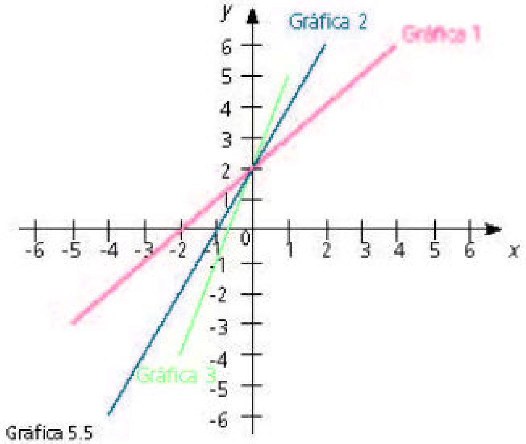
5.2 Un depósito de frijoles con forma de cono tiene un volumen de 47.41 m^3 y su radio mide 4 m.

Nivel 1) ¿Cuánto mide la altura del depósito?
Nivel 2) ¿Cuál es la relación entre la altura y el volumen del cono, cuando el área de la base se mantiene constante?
Nivel 3) Si la altura del depósito es de 10 m, ¿cuánto mide el radio?

La gráfica de una función

5.3 Observa la siguiente gráfica.

Nivel 1) Calcula $f(0)$ y $f(5)$ en la gráfica 1.
Nivel 2) ¿Cuál gráfica corresponde a la función $y = 3x + 2$?
Nivel 3) Determina el dominio e imagen de f en las tres gráficas.



Gráfica 5.5

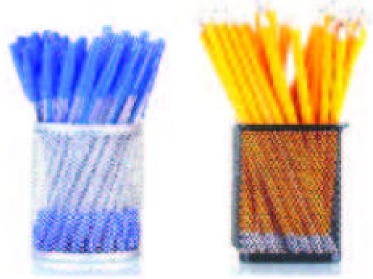
Los dados

5.4 En un juego de lanzar dados dos jugadores deben seguir las siguientes reglas:
En cada lanzamiento se calcula la diferencia entre los puntos de ambos dados, si ésta resulta 0, 1 o 2, el jugador que tiró gana dos fichas. Si la diferencia es 3, 4 o 5, el otro jugador gana dos fichas. El juego se inicia con un total de 40 fichas. El juego termina cuando no quedan más fichas. Después de tres rondas de juego:

Nivel 1) Determina por qué las reglas del juego son justas.
Nivel 2) ¿Qué probabilidad tienen ambos jugadores de ganar?
Nivel 3) Si la regla determina que el jugador que tira gane cuatro fichas cuando la diferencia entre los puntos de ambos dados es 3, 4 o 5, ¿cuál es la probabilidad de que gane el otro jugador con una diferencia de 0, 1 o 2?

Lápices y bolígrafos

5.5 La mamá de Eduardo compró 3 lápices y 2 bolígrafos pagando \$16. En la misma tienda, la mamá de Esther compró 3 bolígrafos y 5 lápices por \$25.



Nivel 1) ¿Cuál es el precio de cada lápiz?
Nivel 2) ¿Cuál es el precio de cada bolígrafo?
Nivel 3) Si la mamá de Eduardo paga \$18 por 4 lápices y 2 bolígrafos, y la mamá de Esther por 12 lápices y 12 bolígrafos paga \$67.20, ya que le dieron un descuento de 20% por precio de mayoreo. ¿Cuál es el precio de lista de cada lápiz y de cada bolígrafo?

El tubo

5.6 Un tubo cuya longitud mide 30 cm y su diámetro es de 8 cm, se encuentra cerrado en ambos extremos y lleno de agua.

Nivel 1) ¿Qué volumen de agua contiene?
Nivel 2) ¿Cuánto mide el radio del tubo?
Nivel 3) Determina la cantidad de agua que contiene el tubo si su longitud es de 43 cm.

La piscina

5.7 Para limpiar la piscina de un conjunto residencial se requiere vaciarla. Antes de comenzar a desalojar el líquido, la piscina contiene 1 600 l. Por el desagüe se eliminan 50 l cada minuto.

Nivel 1) ¿Cuántos litros de agua se desalojaron en un cuarto de hora?
Nivel 2) ¿Cuántos litros de agua quedan en la piscina a la media hora de comenzado el desagüe?
Nivel 3) ¿La gráfica de esta relación es una recta o una parábola?

Autoevaluación

Copia las siguientes cuestiones en tu cuaderno y resuélvelas.

REALIZA

1. Busca dos números cuya suma sea 14 y su diferencia sea 4.
2. ¿Cuántos litros de leche caben en un paquete de forma cúbica cuya arista mide 16 cm?
3. Expresa el área de un triángulo equilátero en función de su lado. ¿Qué tipo de función es?
4. Un peatón camina 3 m en 2 s. Si continúa andando a esa misma velocidad, qué función y representación lo describirían. Grafica la representación.

APLICA

1. ¿Cuáles son los dos números que suman 21 y el doble de uno más el triple del otro es 56?
2. Obtén el volumen de una piscina que tiene 12 m de largo, 9 m de ancho y 2 m de profundidad. Expresa el resultado en metros cúbicos y en litros.
3. Todos los divisores del número 60 se meten en una urna.
   a) Gana el que saque al azar un número menor que 7.
   b) Gana el que saque al azar un número par.
   c) Gana el que saque al azar un múltiplo de 4.

¿Cuál de las opciones para ganar elegirías? ¿Por qué?

REFLEXIONA

1. Reparte \$600.00 entre dos personas de manera que una obtenga el doble de dinero que la otra.
2. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro con una altura de 8 cm y que tiene el mismo volumen que un cubo de 6 cm de arista?
3. La ecuación de la distancia recorrida por un automóvil es $d = 5 + 3t + 2t^2$
   a) ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil al cabo de 5 s de iniciar el movimiento?
   b) ¿Cuál es la distancia recorrida al cabo de 15 s?
   c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido, al recorrer 157 m desde el inicio?

Glosario

AZAR. Todo proceso sin orden cuyo resultado no es previsible.

CILINDRO. Sólido con dos planos circulares idénticos como extremos.

CONO. Objeto sólido (tridimensional) que tiene una base circular y un solo vértice.

ECUACIÓN LINEAL. Ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia. Su forma general es $y = ax + b$

ESFERA. Un objeto tridimensional con la forma de una pelota. Todos los puntos de su superficie están a la misma distancia del centro.

PIRÁMIDE. Poliedro limitado por una base que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado ápice.

PRISMA. Poliedro limitado por dos caras paralelas e iguales llamadas bases, y por tantos paralelogramos como lados tenga cada base. Se llama triangular, pentagonal, etcétera, según sea la base.

RESULTADOS EQUIPROBABLES. Cuando la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos es la misma.

SISTEMA DE ECUACIONES. Conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas, su resolución consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones.

Bibliografía para el alumno

Azzopardi, Gilles. (2004) *500 tests para aumentar su inteligencia*. México: Ediciones Suromex.

Balbuena, Luis. (2006) *Cuentos del cero*. España: Nivola.

Blanco, David. (2005) *Las aventuras del joven Einstein*. España: Nivola Junior.

Carlavilla, José Luis y Fernández, Gabriel. (2003) *Historia de las matemáticas en comics*. España: Proyecto Sur de Ediciones.

Campos, Mario. (2005) *Andrés y el dragón matemático*. España: Laertes.

Frabetti, Carlo. (2000) *Malditas matemáticas: Alicia en el país de los números*. España: Alfaguara.

————. (1998) *El gran juego*. España: Alfaguara.

Guzmán, Miguel de. (2003) *Cuentos con cuentas*. España: Nivola.

Haddon, Mark. (2004) *El curioso incidente del perro a medianoche*. España: Salamandra.

Heranz, Carlos. (2003) *Póngame un kilo de matemáticas*. España: SM-El barco de vapor.

Holt, Michael. (1988) *Matemáticas recreativas 3*. México: Roca.

Mataix Lorda, Mariano. (1998) *La manzana de la discordia*. Barcelona: Marcombo.

————. (1998) *Problemas para no dormir*. Barcelona: Marcombo.

Millás, Juan José. (2001) *Números pares, impares e idiotas*. España: Alba Editorial.

Molina, María. (2004) *El señor del cero*. España: Alfaguara.

Moreno, Ricardo y Vegas, José Manuel. (2006) *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivola.

Norman, Lucy C. (2000) *El país de las mates para expertos*. España: Nivola.

Rodríguez, Rafael y Rodríguez, María del Carmen. (2009) *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. España: Reverté.

Sestier, Andrés. (2001) *Historia de las matemáticas*. México: Limusa.

Sierra, Jordi. (2000) *El asesinato del profesor de matemáticas*. España: Grupo Anaya.

Tahan, Malba. (2001) *El hombre que calculaba*. España: Lectorum Publications.

Torok, Simon. (2005) "Ciencia alucinante" en *El juego de la ciencia*. México: Ediciones Oniro.

Bibliografía para el maestro

Astolfi, Jean Pierre. (2004) *El "error", un medio para enseñar*. México: SEP-DÍADA.

Bruer, John T. (1997) *Escuelas para pensar. Una ciencia del aprendizaje en el aula*. México: SEP/Fondo Mixto/Paidós.

Buxarrais, María Rosa, Martínez, Miquel, Puig, Josep María y Trilla, Jaime. (1997) *La educación moral en primaria y secundaria. Una experiencia española*. México: SEP/CE/EDELVIVES.

Casanova, María Antonia. (1998) *La evaluación educativa. Escuela básica*. México: SEP/CE/Muralla.

Chevallard, Yves; Bosch, Marianna y Gascón, Joseph. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP.

Dirección General de Divulgación de la Ciencia – UNAM. (2000) *Una mirada a la ciencia. Antología de la revista ¿Cómo ves?* México: SEP/UNAM.

Fernández Bravo, José Antonio. (2000) *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Barcelona: Ciss Praxis Educación.

Fullan, Michael y Hargreaves, Andy. (2000) *La escuela que queremos. Los objetivos por los que vale la pena luchar*. 2a. edición. México: SEP/Amorrortu.

Gardner, Howard. (1997) *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*. México: SEP/Fondo Mixto/Paidós.

Hargreaves, Andy, Earl, Lorna y Ryan, Jim. (2000) *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*. México: SEP/Octaedro.

Jan Struik, Dirk. (1994) *Historia concisa de las matemáticas*. México: IPN.

Lerner, Delia. (2001) *Leer y escribir en la escuela*. México: SEP-FCE.

Lesbesgue, Henri. (1995) *La medida de las magnitudes*. México: IPN.

Mejía Fernández, Miguel. (1994) *Proyecto de inteligencia. Harvard, serie VI: Pensamiento inventivo*. Barcelona: Cepe.

Montesinos Sirena, José Luis. (2000) *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. España: Síntesis.

Monroy Pérez, Felipe. (1999) *Matemáticas para el diseño (Introducción a la teoría de la simetría)*. México: Limusa.

Monereo, Carles, Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M. L. (1998) *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*. México: SEP/CE/Graó.

Nieda, Juana y Macedo, Beatriz. (1998) *Un currículo científico para estudiantes de 11 a 14 años*. México: SEP/CE/OEI/UNESCO.

Palacios, Vicente. (2000) *Papiroflexia básica*. Barcelona: Miguel A. Salvatella.

Rutherford, Floyd James (compilador). (1997) *Ciencia: conocimiento para todos*. México: SEP/Oxford/Harla.

SAEM. (1991) *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. España: Thales.

Sagan, Carl. (1998) *El mundo y sus demonios. La ciencia como una luz en la oscuridad*. México: SEP/Planeta.

Saint-Onge, Michel. (2000) *Yo explico, pero ellos... ¿aprenden?*. México: SEP/FCE/Enlace Editorial.

SEP. (1998) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Programa para la transformación y el fortalecimiento académicos de las Escuelas Normales*. México: SEP.

Torres, Rosa María. (1998) *Qué y cómo aprender. Necesidades básicas de aprendizaje y contenidos curriculares*. México: SEP/UNESCO/OREALC.

Tudesco, Juan Carlos. (1997) *Cuadernos de la Biblioteca de Actualización del Maestro. Fortalecimiento del papel del maestro*. México: SEP/OEI/UNESCO.

Bibliografía consultada para la elaboración del libro

Coll, César, *et al.* (1999) *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona: ICE/Horssori.

García Mandruga, Juan A. (1995) *Desarrollo y conocimiento*. 2a. ed. México: Siglo XXI.

Martínez, José María. (1994) *La mediación en el proceso de aprendizaje*. Madrid: Bruño.

McFarlane, Ángela. (2003) *El aprendizaje y las tecnologías de la información. Experiencias, promesas, posibilidades*. México: SEP-Aguilar, Altea, Taurus, Alfaguara.

Ontaria, Antonio. (1998) *Los mapas y las habilidades del pensamiento*. Madrid: Bruño.

Pozo, Juan Ignacio. (1996) *Aprendices y maestros*. Madrid: Alianza.

——— y Monereo, Charles. (1999) *El aprendizaje estratégico*. Aula XXI. Madrid: Santillana.

Puigdellívol, Ignasi. (1996) *Programación de aula y adecuación curricular. El tratamiento de la diversidad*. 2a. ed. Barcelona: Graó.

Román Pérez, Martiniano y Díez López, Eloísa. (1999) *Currículum y programación. Diseños curriculares de aula*. 2a. ed. Madrid: EOS.

Torres, Rosa María. (1998) *Qué y cómo aprender. Necesidades básicas de aprendizaje y contenidos curriculares*. México: SEP.

Sitios y páginas electrónicas de apoyo para el alumno

Escuela Secundaria Obligatoria (ESO): Geometría activa, disponible en: http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.htm (Fecha de consulta: 27 de enero de 2017).

Geogebra, disponible en: geogebratube.org (Consulta: 27 de enero de 2017).

Instituto de Tecnologías Educativas. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España. Recursos didácticos de Matemáticas, disponible en: http://educalab.es/recursos/ (Consulta: 27 de enero de 2017).

Mediateca Colombia Aprende, disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/estudiantes/1599/multipropertyvalues-21118-21142.html (Consulta: 27 de enero de 2017).

Portal Disfruta las Matemáticas, disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/ejercicios/fracciones-decimales.php (Consulta: 27 de enero de 2017).

Portal de la Educación Básica en México, disponible en: http://basica.sep.gob.mx (Consulta: 27 de enero de 2017).

Portal Educativo Conectando neuronas, disponible en: http://www.portaleducativo.net/tercero-basico/147/Cuerpos-redondos (Consulta: 27 de enero de 2017).

Prácticas de ejercicios de Matemáticas, disponible en: http://www.ematematicas.net/porcentajes.php?a=1 (Consulta: 27 de enero de 2017).

Proyecto Descartes. Matemáticas interactivas. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, disponible: en http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena11/3quincena11_contenidos_4a.htm (Consulta: 27 de enero de 2017).

Portal: Educar Chile, disponible en: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/search?sc=1009:&ml=1000091 (Consulta: 27 de enero de 2017).

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistidas por Computadora (PUEMAC), disponible en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/ (Fecha de consulta: 27 de enero de 2017).

Slideshare: Volumen de cubos, prismas y pirámides, disponible en: http://es.slideshare.net/pastormichellevargas/volumen-del-cubo-prismas-y-piramides (Fecha de consulta: 27 de enero de 2017).

Vitutor. Plataforma de teleformación para el aprendizaje en línea, disponible en: http://www.vitutor.com/al/trigo/tri_2.html (Consulta: 27 de enero de 2017).

Sitios y páginas electrónicas de apoyo para el profesor

Ricardo López (2013). Educación Matemática y Tecnologías de la Información, Universidad de Salamanca, disponible en: https://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_07/n7_art_ricardo_lopez.htm (Consulta: 27 de enero de 2017).

Revista de Educación Matemática (Volúmenes varios), disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/ (Consulta: 27 de enero de 2017).

Enseñanza de las ciencias (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21745/21579 (Consulta: 27 de enero de 2017).

BBC Mundo (2016). Las matemáticas econdidas en las grandes obras de arte, disponible en: http://www.bbc.com/mundo/especial/vert_cul/2016/03/160317_vert_matematica_en_obras_de_arte_yv (Consulta: 27 de enero de 2017).

Comunidad científica de Psicología. Psicología y matemáticas (2013), disponible en: http://cociepsi.blogspot.mx/2013/01/psicologia-y-matematicas.html (Consulta: 27 de enero de 2017).